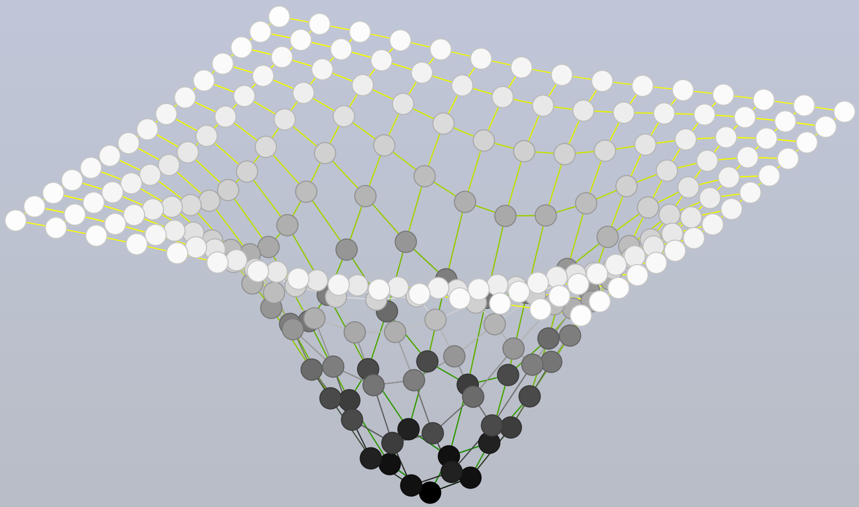
Problemas de Cálculo Vectorial

Ernesto Aranda　　*Pablo Pedregal*



Ernesto Aranda Pablo Pedregal
Universidad de Castilla - La Mancha

PROBLEMAS DE CÁLCULO VECTORIAL

Título: *Problemas de Cálculo Vectorial*
Tercera Edición, febrero 2013

Primera edición publicada por Septem Ediciones, marzo 2004
Segunda edición publicada por Lulu.com, enero 2009

Impreso por Lulu.com

Composición realizada con LaTeX

Todas las imágenes del libro han sido realizadas con PGFPLOTS

Este libro está disponible en descarga gratuita en la dirección
http://matematicas.uclm.es/earanda/?page_id=152

PREFACIO

Estimado lector:
tienes ante tí una nueva edición del libro *Problemas de Cálculo Vectorial*, publicado por primera vez en la editorial *Septem Ediciones* en marzo de 2004, y reeditado en 2009 bajo la modalidad de edición *Print On Demand*[1] con *Lulu.com*. En esta nueva edición hemos corregido una gran cantidad de errores presentes en las ediciones anteriores, y hemos aprovechado para modificar la estructura de los temas para adaptarlos a los cambios suscitados por la integración de los estudios que impartimos al nuevo Espacio Europeo de Enseñanza Superior.

Lo que el lector tiene en sus manos no pretende ser más que un manual para ejercitarse en la resolución de problemas de cálculo de funciones de varias variables, orientado a un primer curso de carreras científico-técnicas. Nuestra intención ha sido recopilar una cantidad suficiente de problemas con soluciones para, por una parte, evitar que el alumno repita innecesariamente ejercicios, y por otra, poder contrastar sus resultados con las soluciones dadas. Para facilitar su uso hemos incluimos también un buen número de ejercicios completamente resueltos que esperamos sirvan a la vez como orientación y referencia para abordar el resto de problemas.

La resolución de ejercicios es, sin lugar a dudas, el aspecto esencial en el estudio de las asignaturas de matemáticas. Pero aunque aprender a resolverlos resulta clave para superar estas asignaturas, no hay sin embargo una metodología explícita que asegure el éxito. Si bien, la única forma de aprender a hacer ejercicios es haciéndolos, el exceso de repetición suele traer consigo un aprendizaje que se basa más en el uso de la memoria que en el del razonamiento. Es entonces cuando cualquier nueva variante de un ejercicio se torna muy difícil para el alumno, lo que le lleva a la frustrante sensación de realizar un considerable esfuerzo en el estudio de una asignatura de la que luego no obtiene resultados satisfactorios.

Los libros de problemas como éste pretenden inculcar en el alumno esa metodología necesaria para poder abordar los ejercicios, tratando de conjugar las ideas presentes en los resultados teóricos con los ejemplos realizados, para aplicarlas luego de forma adecuada al nuevo problema. Es en este punto

[1] Impresión bajo demanda

cuando se requiere que el estudiante realice el esfuerzo máximo, que consiste en enfrentarse de forma autónoma a la resolución del problema.

Los contenidos que comprenden los ejercicios que exponemos aquí corresponden a un curso típico de iniciación en el cálculo de funciones de varias variables: continuidad, derivación parcial, integración múltiple, una breve iniciación a la geometría diferencial a través del estudio de curvas y superficies y los teoremas clásicos del cálculo vectorial; todo ello con un enfoque definitivamente no analítico. Hemos incluido también un capítulo inicial destinado a repasar aspectos de geometría del plano y del espacio, que constituyen el entorno básico a partir del cual el cálculo vectorial encuentra una referencia visual siempre útil, y hemos tratado de ilustrar gráficamente buena parte de los ejercicios.

Las cuestiones técnicas y abstractas han sido dejadas de lado para centrarnos en los aspectos del cálculo formal, con el fin de inculcar una adecuada y necesaria soltura operacional que sirva como base para afrontar otras asignaturas científicas o tecnológicas donde tales habilidades son bien apreciadas.

Ciudad Real, 12 de febrero de 2013
Los autores.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo

0

GEOMETRÍA DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Este es un capítulo introductorio en el que nos centraremos en ejercicios preliminares de gran utilidad para afrontar adecuadamente el cálculo de funciones de varias variables. Tanto los ejemplos como los ejercicios que esencialmente aparecen en el estudio de estas funciones suelen estar referidos al plano o al espacio, es decir, se trata con funciones de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$. Los motivos son simples: en primer lugar, no hay una diferencia substancial entre lo que ocurre para estas funciones y las funciones definidas en espacios de dimensión superior, mientras que por otro lado, en estos espacios podemos tener una representación gráfica de estas funciones que ayuda a aclarar conceptos y facilita su comprensión.

Es por ello que los ejercicios de este primer tema están dedicados a repasar cuestiones relativas a geometría elemental del plano y del espacio, a tratar con algunos objetos como las cónicas y las cuádricas, que suelen aparecer como los ejemplos más típicos de objetos bidimensionales y tridimensionales, respectivamente, y a introducir el uso de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas, que serán usadas con frecuencia en muchos otros ejercicios. La intención es recordar o introducir al lector en el uso de estas herramientas básicas con las que poder moverse sin dificultad en este contexto.

0 1

REPASO DE GEOMETRÍA DEL PLANO Y EL ESPACIO

■ Determinar si las siguientes ternas de puntos están o no alineadas:

1 $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, -2)$.

2 $(4, 0)$, $(0, 1)$, $(12, -2)$.

3 $(3, -1)$, $(1, 0)$, $(-3, 2)$.

4 $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 5)$.

Solución:

2 Tres puntos están alineados si los vectores que los unen son colineales. De este modo construimos dos vectores que unan los puntos:

$\mathbf{u}_1 = (4,0) - (0,1) = (4,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (12,-2) - (0,1) = (12,-3)$. Para ver si son colineales se comprueba si el determinante formado por estos dos vectores es o no nulo. Dicho determinante vale 0, por lo que los puntos están alineados.

4 Puesto que uno de los puntos es el origen, basta comprobar si los vectores $(3,2)$ y $(1,5)$ son colineales. El determinante formado por estos dos vectores vale 13, por lo tanto los puntos dados no están alineados.

■ Encontrar la ecuación de la recta perpendicular al vector $\mathbf{v}$ y que pasa por el punto P en los casos:

5 $\mathbf{v} = (1,-1)$, $P = (-5,3)$.

6 $\mathbf{v} = (-5,4)$, $P = (3,2)$.

7 $\mathbf{v} = (0,1)$, $P = (0,3)$.

8 $\mathbf{v} = (2,3)$, $P = (-1,-1)$.

Solución 7:

En general sabemos, y es sencillo comprobar, que la recta que es perpendicular al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ es la recta de ecuación

$$v_1(x - p_1) + v_2(y - p_2) = 0.$$

En este caso concreto obtenemos la recta $y = 3$.

■ ¿Cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares?

9 $2x - 5y = 1,\ 2x + y = 2$.

10 $3x - 5y = 1,\ 5x + 3y = 7$.

11 $-x + y = 2,\ x + y = 9$.

12 $x + 2y = 5,\ y = 3 + 2x$.

Solución 10:

El criterio de perpendicularidad entre rectas se reduce a comprobar si sus vectores directores, o equivalentemente, sus vectores normales, son perpendiculares. Esto sucede cuando el producto escalar de tales vectores es nulo. Puesto que para una recta de ecuación

$$ax + by + c = 0$$

un vector normal viene dado por (a,b), es fácil ver que en este ejemplo concreto tenemos

$$(3,-5) \cdot (5,3) = 0,$$

y por tanto las dos rectas son perpendiculares.

■ Encontrar las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por los pares de puntos dados:

13 $(1,1,-1)$, $(-2,1,3)$.

14 $(-1,5,2)$, $(3,-4,1)$.

15 $(1,0,1)$, $(0,1,0)$.

16 $(0,1,2)$, $(-1,0,3)$.

Solución 13:

En general, la recta del espacio que pasa por dos puntos dados $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ viene dada en forma paramétrica por

$$x = tp_1 + (1-t)q_1,$$
$$y = tp_2 + (1-t)q_2,$$
$$z = tp_3 + (1-t)q_3,$$

donde t es un parámetro que se mueve en la recta real. En este ejemplo concreto, las ecuaciones paramétricas de la recta quedan

$$x = 3t - 2, \quad y = 1, \quad z = 3 - 4t.$$

■ Encontrar la ecuación vectorial de las rectas

17 De ecuaciones paramétricas: $x = -t$, $y = 1 + \sqrt{2}t$, $z = 6 - 8t$.

18 Que pasa por los puntos $P = (0,0,0)$, $Q = (1,2,3)$.

19 Donde se intersecan los planos $3x + y - 4z = 0$, $5x + z = 2$.

■ Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\mathbf{n}$ que pasa por el punto P en los siguientes casos:

20 $\mathbf{n} = (1,-1,3)$, $P = (4,2,-1)$.

21 $\mathbf{n} = (-1,0,5)$, $P = (2,3,7)$.

22 $\mathbf{n} = (1,0,0)$, $P = (2,1,1)$.

23 $\mathbf{n} = (0,2,3)$, $P = (3,4,5)$.

24 $\mathbf{n} = (3,2,6)$, $P = (2,-1,0)$.

25 $\mathbf{n} = (0,0,1)$, $P = (1,3,-2)$.

Solución 25:

La ecuación del plano perpendicular a un vector dado de coordenadas $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ que pasa por un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ tiene por ecuación

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

En este caso concreto la ecuación es $z + 2 = 0$.

■ Determinar un punto P por el que pase el plano dado y un vector $\mathbf{n}$ perpendicular al mismo, en los siguientes casos:

26 $3x + z = 3$.

27 $x - y - z = 5$.

28 $y = 0$.

29 $2x + y - z = 1$.

■ Encontrar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados:

30 $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$.

31 $(-5, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$.

32 $(2, 1, 0)$, $(0, 0, 7)$, $(2, 1, 1)$.

33 $(1, 3, 0)$, $(-5, -3, -1)$, $(-2, 0, 1)$.

Solución 32:

La ecuación del plano que pasa por tres puntos dados:

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3),$$

se puede obtener mediante el determinante

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En nuestro caso, la ecuación queda

$$\begin{vmatrix} x - 2 & -2 & 0 \\ y - 1 & -1 & 0 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y = 0.$$

34 Encontrar la ecuación del plano que contiene a las rectas paralelas:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}, \qquad \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}.$$

■ Encontrar un vector que sea perpendicular a los pares de vectores dados:

35 $(1, 2, -3)$, $(2, -1, 3)$.

36 $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

37 $(1, 1, 1)$, $(0, -1, 2)$.

38 $(6, -6, 2)$, $(1, 3, -1)$.

Solución 35:

En el espacio, un vector perpendicular a dos dados se puede obtener rápidamente a través del producto vectorial, pues dados dos vectores linealmente independientes $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ siempre es un vector ortogonal a ambos. Dicho producto vectorial se calcula mediante el determinante simbólico

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

que representa un vector cuyas componentes son los adjuntos de la primera fila.

En consecuencia, el vector pedido en este ejercicio es

$$(1, 2, -3) \times (2, -1, 3) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right),$$

que resulta el vector $(3, -9, -5)$ que, efectivamente es ortogonal a los dos vectores iniciales.

■ Encontrar un vector paralelo a la recta intersección de los pares de planos siguientes:

39 $2x - y + z = 1,\ 3x + y + z = 2.$

40 $x - y = 1,\ y + z = 4.$

41 $4x - y = 0,\ x + 4y + z = 5.$

Solución 40:

El vector director de la recta determinada como intersección de dos planos es precisamente un vector ortogonal a los dos vectores normales a los dos planos. Además sabemos que un vector normal a un plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es el vector (a, b, c). Por tanto este problema es similar a los Ejercicios 35–38, en los que se pide un vector ortogonal a dos dados. El producto vectorial proporciona la respuesta de manera directa. En este caso concreto se obtiene

$$(1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1).$$

■ Encontrar la ecuación del plano que contiene al punto $(-1, 2, 3)$ y es:

42 paralelo al plano XY,

43 perpendicular al eje X,

44 perpendicular al eje Y.

Solución 44:

Al buscar un plano perpendicular al eje Y, estamos aportando el dato del vector normal al plano que debe ser precisamente el eje Y, $(0, 1, 0)$ (véanse los Ejercicios 20–25). En consecuencia la ecuación del plano solicitado será

$$0(x + 1) + 1(y - 2) + 0(z - 3) = 0,$$

es decir, $y = 2$.

45 Consideremos los puntos $P = (1, 3, -2)$ y $Q = (1, -1, 2)$ y el vector $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$. Encontrar el punto de intersección de la recta que pasa por P con dirección $\mathbf{n}$ y el plano que pasa por Q perpendicular a $\mathbf{n}$.

Solución 45:

Un punto genérico de la recta que pasa por P y tiene vector director $\mathbf{n}$ es, en forma paramétrica, $X = P + t\mathbf{n}$. Mientras que la ecuación del plano perpendicular a $\mathbf{n}$ que pasa por Q es $\mathbf{n} \cdot (X - Q) = 0$, donde hemos usado la notación vectorial $X = (x, y, z)$. Luego si buscamos el punto intersección tendremos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} X = P + t\mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot (X - Q) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (P + t\mathbf{n} - Q) = 0,$$

de donde despejamos el valor del parámetro t para obtener

$$t = \frac{\mathbf{n} \cdot (Q - P)}{|\mathbf{n}|^2},$$

y por tanto, el punto de la recta buscado será

$$X = P + \frac{\mathbf{n} \cdot (Q - P)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

En el caso concreto que nos ocupa, resulta que $\mathbf{n} \cdot (Q - P)$ se anula y consecuentemente el punto solicitado es el mismo P.

■ Encontrar el punto de corte de los planos siguientes con los ejes coordenados.

46 $x + y + z = 1$.

47 $x + y = 1$.

48 $-x + 3y + 3z = -3$.

49 $2y + z = 0$.

Solución 48:

Los puntos de corte de un cierto plano con los tres ejes coordenados se obtienen anulando dos de las coordenadas, por turno, y despejando la tercera de la propia ecuación del plano. Así, si el plano tiene ecuación $-x + 3y + 3z = -3$ los puntos de corte serán:

- Con el eje X: $y = z = 0$, $-x = -3$, y el punto resulta ser el $(3, 0, 0)$.
- Con el eje Y: $x = z = 0$, $3y = -3$, y el punto de intersección es $(0, -1, 0)$.
- Con el eje Z: $x = y = 0$, $3z = -3$, y el punto es $(0, 0, -1)$.

Determinar el paralelismo o perpendicularidad de los siguientes pares de planos.

50 $x - 3y + 2z = 4$, $-2x + 6y - 4z = 0$.

51 $4x + 3y - z = 6$, $x + y + 7z = 4$.

52 Encontrar la distancia entre el punto $(1, 1, 2)$ y el plano de ecuación $3x + y - 5z = 2$.

53 Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x - y + 2z = 5$, $3x - y + 2z = 7$. Calcular el volumen del cubo.

Solución 53:

Si dos caras de un cubo se encuentran en dos planos paralelos, el lado del cubo tendrá que ser necesariamente la distancia entre ambos planos. Esta distancia es además la distancia de un punto de uno de los planos al otro plano. Tal fórmula de la distancia es

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

donde $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es la ecuación del plano y $P = (x_0, y_0, z_0)$ el punto respecto del que calculamos la distancia. En nuestro caso concreto

$$P = (1, 0, 1), \quad \pi \equiv 3x - y + 2z - 7 = 0,$$

y por lo tanto la distancia, aplicando la fórmula anterior, es $\frac{2}{\sqrt{14}}$. Así, el volumen del cubo pedido será el cubo de este valor, es decir, $\frac{4}{7\sqrt{14}}$.

54 Encontrar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A = (-1, 5, 3)$ y $B = (6, 2, -2)$.

Solución 54:

Es fácil caer en la cuenta de que el lugar geométrico solicitado es exactamente el plano perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ que pasa por el punto medio $\frac{1}{2}(A + B)$ (el plano mediatriz). Una vez entendida la afirmación anterior es muy sencillo comprobar que la ecuación de tal plano es $14x - 6y - 10z = 9$.

■ Dibujar los siguientes conjuntos del plano y del espacio:

55 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ \log x \leq y\}$.

56 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y < e^x\}$.

57 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$.

58 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

59 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0\}$.

60 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

61 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - 1| + |y - 1| < 2\}$.

62 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \leq 4\}$.

63 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$.

64 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ xy = 1\}$.

65 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \operatorname{sen} y\}$.

Solución:

57 En la desigualdad $x^2 - 2x + y^2 \leq 3$, podemos completar cuadrados del siguiente modo:

$$x^2 - 2x + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 4.$$

Si prestamos atención a la expresión anterior con igualdad, debemos distinguir la ecuación de una circunferencia[1] de centro el punto $(1, 0)$ y radio 2. Para estudiar la desigualdad observamos que ésta corresponde a los puntos interiores de la misma, luego el conjunto pedido resulta ser el círculo (incluida la frontera) de centro $(1, 0)$ y radio 2.

[1] Recuérdese que la ecuación de una circunferencia de centro (a, b) y radio r se escribe como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

59 No es difícil observar que la condición

$$(4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0$$

se desglosa en dos posibilidades. La primera corresponde a

$$4x - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0,$$

y la segunda a

$$4x - x^2 - y^2 \leq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \geq 0.$$

Después de usar la técnica de completar cuadrados, estas dos posibilidades se pueden reinterpretar como

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 4, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1,$$

y

$$(x-2)^2 + y^2 \geq 4, \quad (x-1)^2 + y^2 \geq 1,$$

respectivamente. El primer caso corresponde a la intersección de los dos círculos centrados respectivamente en $(2,0)$ y $(1,0)$, y de radios 2 y 1. Mientras que la segunda posibilidad es precisamente la intersección de los exteriores de esos mismos círculos (véase la Figura 1). La unión de ambas regiones es el conjunto del plano pedido.

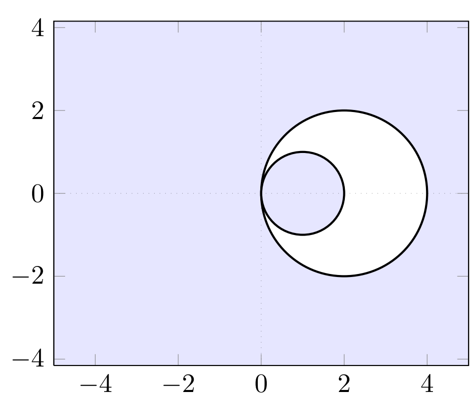


Figura 1: Ejercicio 59: región $(4x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2x) \leq 0$

61 Para entender el conjunto de puntos del plano que satisfacen la condición

$$|x-1| + |y-1| < 2,$$

es buena estrategia intentar determinar su frontera que corresponde a la condición

$$|x-1|+|y-1|=2.$$

Es también claro que esta ecuación representa la traslación de vector $(1,1)$ de la región de ecuación

$$|x|+|y|=2.$$

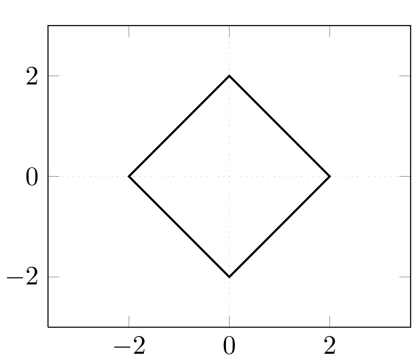
Como en esta ecuación interviene el valor absoluto para las dos variables x e y, lo más sencillo consiste en analizar dicha ecuación en los cuatro cuadrantes, obteniendo el siguiente resultado:

- Primer cuadrante: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y=2$.
- Segundo cuadrante: $x \leq 0$, $y \geq 0$, $-x+y=2$.
- Tercer cuadrante: $x \leq 0$, $y \leq 0$, $-x-y=2$.
- Cuarto cuadrante: $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x-y=2$.

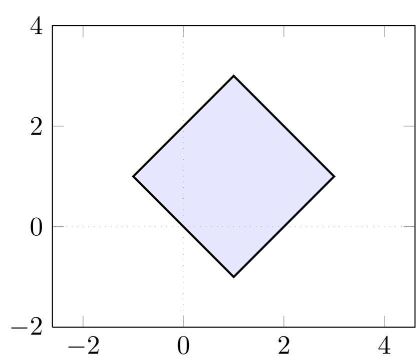
Si representamos estas cuatro rectas en cada cuadrante obtenemos el rombo de la Figura 2(a). La desigualdad

$$|x|+|y|<2$$

corresponderá al interior o al exterior (en todo caso sin su frontera) del rombo. Es fácil ver que se trata del interior pues el origen $(0,0)$ verifica la desigualdad anterior. En definitiva, la región solicitada inicialmente es el rombo sólido centrado en el $(1,1)$ trasladado del rombo anterior (véase la Figura 2(b)).



(a) Rombo $|x|+|y|=2$



(b) Conjunto $|x-1|+|y-1|<2$

Figura 2: Ejercicio 61

64 En el plano, la ecuación $xy = 1$ representa las dos ramas de la bien conocida hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$. ¿Qué sucede cuando esta misma ecuación la consideramos en el espacio? Como la ecuación no hace referencia a la tercera variable z, cualquier punto (x, y, z) tal que $xy = 1$ pertenecerá a esa región. Gráficamente esto se consigue "desplazando" la hipérbola $xy = 1$ dibujada en el plano $z = 0$ paralelamente, hacia arriba y hacia abajo, al eje Z (ver Figura 3).

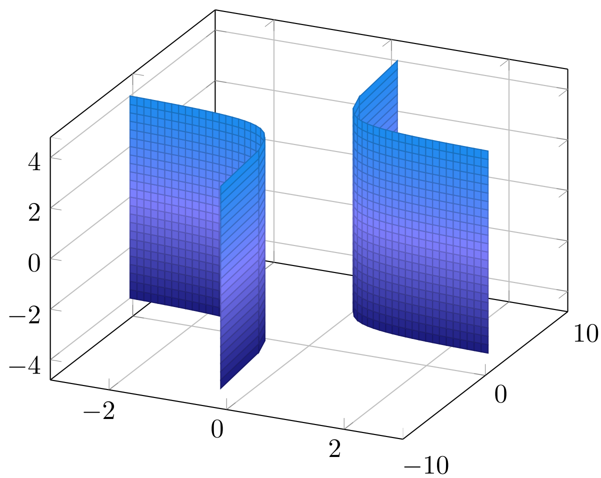


Figura 3: Ejercicio 64: $xy = 1$ en $\mathbb{R}^3$

0 2

CÓNICAS Y CUÁDRICAS

■ Esbozar la gráfica de las siguientes cónicas y señalar sus elementos:

66 $x^2 + 9y^2 = 36.$

67 $x^2 + y^2 - 2x = 0.$

68 $3x^2 - 6x + y = 7.$

69 $x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1.$

70 $x^2 + xy + y^2 = 4.$

71 $\frac{19}{4}x^2 + \frac{43}{12}y^2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}xy = 48.$

72 $3x^2 = 2 + y^2.$

73 $xy = 2.$

74 $x^2 + 2x - 6y - 17 = 0.$

75 $x^2 - xy + y^2 = 2.$

76 $9x^2 - 24xy + 2y^2 = 0.$

77 $3x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{6}{\sqrt{2}}x - \frac{6}{\sqrt{2}}y = 8.$

Solución:

68 Al tratarse de una ecuación sin término cruzado xy la simple completación del cuadrado nos permite identificar la cónica en cuestión. En este caso

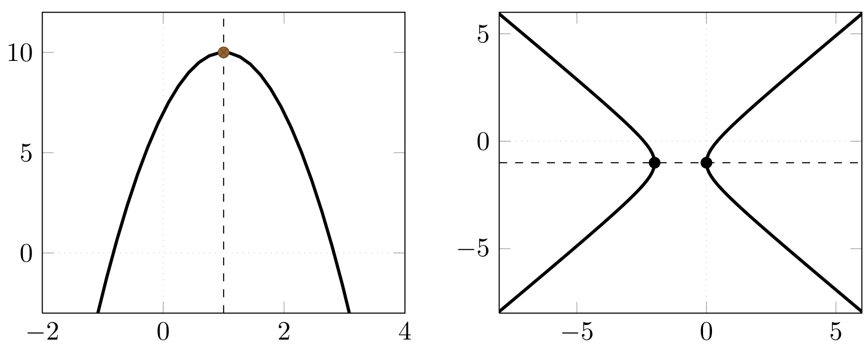
$$3x^2 - 6x + y = 7 \text{ se escribe como } 3(x-1)^2 = -(y-10).$$

Se trata de la parábola[2] de vértice $(1, 10)$ y eje principal $x = 1$, con foco $(1, \frac{119}{12})$ y directriz $y = \frac{121}{12}$ (véase Figura 4(a)).

69 Al igual que el apartado anterior, completando cuadrados,

$$x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1 \text{ se escribe } (x+1)^2 - (y+1)^2 = 1,$$

que corresponde a la hipérbola[3] de eje principal $y = -1$ y centro $(-1, -1)$. Los vértices se encuentran en los puntos $(0, -1)$ y $(-2, -1)$ (Figura 4(b)).



(a) Parábola $3x^2 - 6x + y = 7$ (b) Hipérbola $x^2 + 2x - y^2 - 2y = 1$

Figura 4: Cónicas de los Ejercicios 68 y 69

77 En este caso tenemos un término en xy que nos obliga a realizar una rotación para poder identificar la cónica. Para ello procedemos del siguiente modo. El ángulo de rotación α viene determinado por

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} \quad \text{si } A \neq C$$

[2] La ecuación $y = ax^2$ representa a una parábola de vértice en el origen, eje Y, foco en $(0, c)$, con $c = \frac{1}{4a}$ y directriz la recta $y = -c$. Una traslación a vértice (x_0, y_0) proporciona la ecuación $y - y_0 = a(x - x_0)^2$.

[3] La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ corresponde a una hipérbola de centro el origen y eje principal Y (X, respectivamente) con focos en los puntos $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$. Una traslación a centro (x_0, y_0) da lugar a la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$.

donde B es el coeficiente del término xy y A y C los coeficientes de x^2 e y^2, respectivamente. Si $A = C$ entonces $\alpha = \frac{\pi}{4}$, como es nuestro caso. La rotación viene dada por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

En este caso, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$. Sustituyendo en la ecuación,

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - \frac{6}{\sqrt{2}}x - \frac{6}{\sqrt{2}}y = 8 \Rightarrow X^2 + 2Y^2 - 3X = 4$$

y completando cuadrados,

$$(X - \tfrac{3}{2})^2 + 2Y^2 = \tfrac{25}{4}$$

Es decir, la ecuación girada corresponde a una elipse[4] de centro $(\frac{3}{2}, 0)$ y ejes $x = \frac{3}{2}$ e $y = 0$ (representada en línea discontinua en la Figura 5). La ecuación original representará a una elipse de centro $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$ y ejes $y = x$ y $x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, calculados según las ecuaciones de la rotación dada.

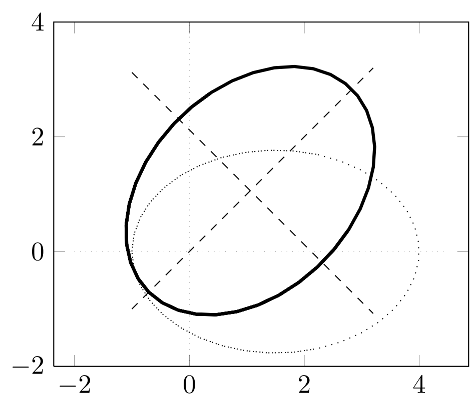


Figura 5: Ejercicio 77: elipse rotada

■ Encontrar la ecuación de las parábolas con el foco y directriz siguientes:

[4]La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa una elipse de centro el origen, ejes X e Y, con semiejes a y b y focos en $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (para $a > b$). La traslación a centro (x_0, y_0) da la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

78 $F = (0, 4)$, $y = -4$.

79 $F = (4, 0)$, $x = -3$.

80 $F = (3, 1)$, $x = 1$.

81 $F = (0, 0)$, $y = -2$.

Solución 80:

La parábola puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo (el foco) y una recta fija (la directriz) es constante. De este modo, la parábola en este caso vendrá definida por la ecuación:

$$\operatorname{dist}((x, y), (3, 1)) = \operatorname{dist}((x, y), x = 1).$$

Luego,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x - 1|.$$

Un sencillo cálculo proporciona la ecuación $y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$, que mediante completación de cuadrados da

$$(y-1)^2 = 4(x-2),$$

que corresponde a la parábola de vértice $(2, 1)$ y eje $y = 1$.

82 Encontrar la ecuación de cada parábola que tiene vértice en el origen, y su foco coincide con los de la elipse $169x^2 + 25y^2 = \frac{169}{4}$.

83 Encontrar la ecuación del círculo que pasa a través del foco de la parábola $x^2 + 8y = 0$ y los focos de la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

Solución 83:

Según la nota 2 de la pág. 18, el foco de esta parábola es $(0, -2)$. En el caso de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ centrada en el origen, los focos están en los puntos $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (si $a > b$) o en los puntos $(0, \pm c)$, para $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ (si $a < b$). Un simple cálculo nos muestra que $a = 5$ y $b = 4$, de modo que los focos están en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Por último, para encontrar la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos, teniendo en cuenta que su centro debe estar a la misma distancia de éstos puntos, debe ocurrir que el centro se encuentre en el punto de intersección entre las mediatrices de cada par de puntos.

Un simple cálculo muestra que la mediatriz entre $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ es $x = 0$, mientras que la mediatriz entre $(3, 0)$ y $(0, -2)$ es $3x + 2y = \frac{5}{2}$. La intersección es $(0, \frac{5}{4})$. Calculando la distancia entre este punto y cualquiera de los otros tres nos da un radio igual a $\frac{13}{4}$. El círculo tiene por ecuación $2x^2 + 2y^2 - 5y - 18 = 0$ (véase la nota 1 de la pág. 14).

84 Probar que si $m \neq 0$, la recta de ecuación $y = mx + \frac{c}{m}$ es tangente a la parábola $y^2 = 4cx$.

85 Mostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4cx$ en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$y_0 y = 2c(x + x_0).$$

Solución 85:

La condición de tangencia se puede expresar imponiendo que la ecuación que representa la intersección de ambas tenga una raíz doble en el punto de tangencia. En este caso

$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 4cx \\ y_0 y = 2c(x + x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 y = \frac{y^2}{2} + 2cx_0,$$

cuyas raíces son

$$y = y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4cx_0}.$$

Teniendo en cuenta que (x_0, y_0) es el punto de tangencia, y por tanto pertenece a la parábola, se concluye el resultado.

86 Probar que la tangente a una elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

87 Probar que la elipse $x^2 + 2y^2 = 16$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ se cortan formando ángulo recto.

88 La tangente en P a una hipérbola interseca a sus asíntotas en los puntos Q y R. Probar que entonces P es el punto medio de $\overline{QR}$.

89 Supongamos que la tangente a una parábola en un punto P interseca a la recta directriz en el punto Q. Si F es el foco de la parábola, demostrar que $\overline{FQ}$ es perpendicular a $\overline{FP}$.

90 Un disco parabólico de 10 m. de diámetro y 5 m. de profundidad es usado como radiotelescopio. ¿Dónde debe estar colocado el receptor?

91 Supongamos que un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados se encuentra inscrito en una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ¿Donde habrán de situarse los vértices para que el rectángulo tenga área máxima?

■ Identificar las siguientes cuádricas.

92 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

93 $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$.

94 $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

95 $x^2 + 2y^2 - z = 0$.

96 $x^2 - z^2 = 0$.

97 $x^2 + 4y^2 = 100$.

98 $x^2 + y^2 + z + 4 = 0$.

99 $4x = y^2 - 2z^2$.

100 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4y + 2z = 0$.

101 $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x - 4y = 0$.

102 $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$.

103 $4x^2 - y^2 + z^2 + 8x + 8z = -24$.

104 $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

105 $yz = 1$.

106 $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 8x - 4y - 8z = -8$.

107 $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x + 9y - 8z = -10$.

108 $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 4y = 0$.

109 $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$.

Solución:

106 La técnica de completación de cuadrados da lugar a la ecuación

$$4(x+1)^2 + (y-2)^2 + 4(z-1)^2 = 4,$$

que corresponde a un elipsoide[5] de centro $(-1, 2, 1)$, con secciones Y circulares.

108 La simplificación de la ecuación mediante la completación de cuadrados proporciona

$$(x-2)^2 - (y+2)^2 - z^2 = 0,$$

que representa un cono[6] circular de eje $y = -2$, $z = 0$ (paralelo a X), de vértice $(2, -2, 0)$.

[5]La ecuación de un elipsoide de centro el origen y semiejes a, b y c es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

[6]La ecuación de un cono de vértice el origen y eje Z es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

110 Probar que la intersección entre el cono $x^2+y^2=z^2$ y el plano $z=1$ es un círculo.

111 Probar que la proyección en el plano XY de la intersección entre el cono $x^2+y^2=z^2$ y el plano $2z=y+1$ es una elipse.

Solución 111:

Como sabemos, la intersección de dos curvas corresponde al conjunto de puntos que satisface ambas ecuaciones. Por otro lado, la proyección de un punto (x,y,z) sobre el plano XY es el punto $(x,y,0)$. Es decir, dicha proyección se calcula haciendo "desaparecer" la coordenada z. Así, la ecuación de la proyección se obtiene despejando z de ambas ecuaciones e igualando. Esto es,

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}(y+1)^2,$$

que puede escribirse como la elipse $x^2+\frac{3}{4}(y-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{3}$.

112 Probar que la proyección en el plano XY de la intersección del plano $z=2y$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$ es un círculo.

113 Probar que la proyección en el plano XZ de la intersección de los paraboloides $y=2x^2+3z^2$ e $y=5-3x^2-2z^2$ es un círculo.

0 3

COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

- Convertir las siguientes coordenadas de cartesianas a polares:

114 $(0,3)$.

115 $(\sqrt{3},1)$.

116 $(-1,\sqrt{3})$.

117 $(-2,-2)$.

Solución 116:

Las fórmulas del cambio son bien conocidas

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

donde hay que tener en cuenta la ambigüedad que supone esta arcotangente. De este modo, si $x=-1$ e $y=\sqrt{3}$, tendremos

$$r=\sqrt{1+3}=2,\quad \theta=\arctan(-\sqrt{3})=\tfrac{2\pi}{3}.$$

- Convertir las siguientes coordenadas de polares a cartesianas:

118 $(1, \frac{\pi}{4})$.

119 $(2, \frac{\pi}{3})$.

120 $(1, -\frac{\pi}{3})$.

121 $(3, \frac{3\pi}{2})$.

Solución 121:
Las fórmulas del cambio de polares a cartesianas son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

En este caso concreto, tendremos

$$x = 3\cos\tfrac{3\pi}{2} = 0, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\,\tfrac{3\pi}{2} = -3.$$

■ Convertir las siguientes coordenadas cartesianas a cilíndricas:

122 $(1, -1, 0)$.

123 $(-\sqrt{3}, -1, 1)$.

124 $(6, 0, -2)$.

125 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

126 $(0, 6, -2)$.

127 $(-1, 0, 3)$.

Solución 123:
Las fórmulas del cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas son

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z,$$

por tanto, en este ejemplo concreto tendremos

$$r = 2, \quad \theta = \frac{7\pi}{6}, \quad z = 1.$$

■ Convertir las siguientes coordenadas cilíndricas a cartesianas:

128 $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

129 $(1, \frac{\pi}{6}, 4)$.

130 $(0, \frac{\pi}{18}, 6)$.

131 $(3, \frac{\pi}{4}, 8)$.

132 $(2, -\frac{\pi}{4}, 3)$.

133 $(2, \pi, 3)$.

Solución 132:
Las fórmulas del cambio de cilíndricas a cartesianas son

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z.$$

En este caso concreto

$$x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2}, \quad z = 3.$$

■ Convertir las siguientes coordenadas cartesianas a esféricas:

134 $(0, 1, 1)$.

135 $(0, 0, -2)$.

136 $(1, 1, 1)$.

137 $(1, 0, 1)$.

Solución 136:

El cambio de coordenadas cartesianas a esféricas se lleva a cabo mediante las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

En este caso concreto se obtiene

$$\rho = \sqrt{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

■ Convertir las siguientes coordenadas esféricas a cartesianas:

138 $(3, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$.

139 $(8, \frac{\pi}{6}, \pi)$.

140 $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

141 $(2, \frac{\pi}{3}, 0)$.

Solución 139:

En este caso las fórmulas del cambio son

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho\cos\phi.$$

Luego obtenemos

$$x = 8\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\pi = 0, \; y = 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\pi = 0, \; z = 8\cos\pi = -8.$$

■ Encontrar la ecuación polar de las curvas siguientes

142 $x^2 + y^2 = 25$.

143 $y^2(2a - x) = x^3$, $a > 0$.

144 $x^2 - y^2 = 1$.

145 $y^2 = x$.

146 $xy = 1$.

147 $x + y = 4$.

Solución 143:

Para encontrar la ecuación polar de una curva dada en coordenadas cartesianas no hay más que introducir las fórmulas del cambio en la ecuación de la curva, simplificar cuando sea posible, e intentar dar r en

función de θ teniendo en cuenta las restricciones que debemos imponer para que el radio r sea no negativo. En concreto, tenemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2 \theta(2a - r\cos\theta) = r^3 \cos^3 \theta.$$

Después de unas cuantas manipulaciones y simplificaciones, y notando que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se llega a

$$r = \frac{2a \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos\theta}.$$

Puesto que $r \geq 0$, debemos exigir que $\cos\theta > 0$. Esta condición se da cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

■ Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de las siguientes expresiones polares:

148 $r = 3$.

149 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

150 $r^2 = |\cos(2\theta)|$.

151 $r = 3\sec\theta$.

Solución 150:

Si multiplicamos la ecuación por r^2 y notamos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, llegamos a

$$r^4 = \left| r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta \right|,$$

de modo que

$$(x^2 + y^2)^2 = \left| x^2 - y^2 \right|.$$

■ Encontrar los puntos de intersección de los pares de curvas siguientes, expresadas en coordenadas polares:

152 $r = 2$, $r = \cos\theta$.

153 $r = \operatorname{sen}\theta$, $r^2 = 3\cos^2\theta$.

Solución 153:

Si elevamos al cuadrado la primera ecuación e igualamos las dos expresiones para r^2 se obtiene la ecuación

$$3\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta,$$

cuyas soluciones deben satisfacer

$$\arctan\theta = \pm\sqrt{3},$$

es decir, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. No obstante, observamos que los ángulos $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ dan un valor negativo para el seno, y en consecuencia para r en la primera ecuación. Como esto no es posible debemos descartar estos dos valores. Los puntos de intersección serán por tanto los correspondientes a $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, es decir, $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

■ Esbozar las curvas cuya ecuación en coordenadas polares es:

154 $r = a^2|\cos(2\theta)|$.

155 $r = a(1 + \cos\theta)$.

156 $r = 2 + \cos\theta$.

157 $r = a|\cos(2\theta)|$.

158 $r = a|\operatorname{sen}(3\theta)|$.

159 $r = e^{\theta/2}$.

160 $r\theta = a$.

161 $r = a|\cos(3\theta)|$.

162 $r = a|\operatorname{sen}(2\theta)|$.

163 $r = 2a\operatorname{sen}\theta\tan\theta$.

164 $r^2 = a^2\cos\theta$.

Solución 155:

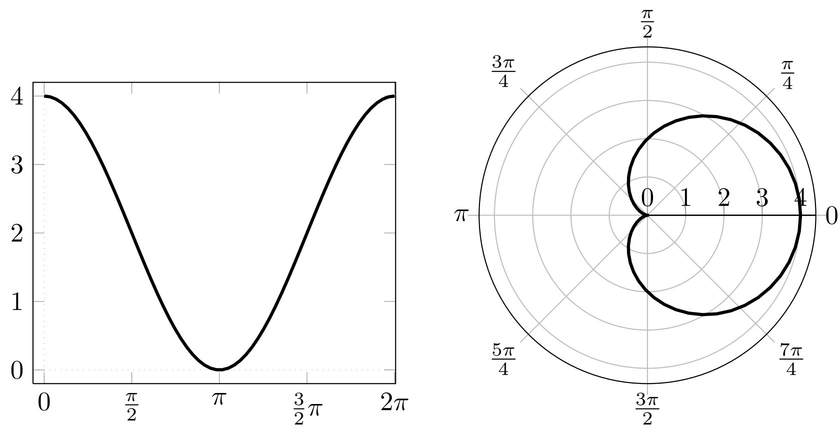
La técnica seguida para representar curvas en polares consiste en analizar la variación del radio vector r en función del ángulo θ. Por ejemplo, para la ecuación $r = a(1 + \cos\theta)$ para $a = 2$ observamos que la función en un plano cartesiano (θ, r) definida por tal ecuación viene representada en la Figura 6(a). Vemos por tanto que para el ángulo $\theta = 0$ estamos a distancia $r = 4$, luego la curva parte del punto $(4, 0)$ (Figura 6(b)). A medida que θ evoluciona hasta $\frac{\pi}{2}$, el radio vector disminuye hasta distancia 2 (luego alcanzará el punto $(0, 2)$), y posteriormente a $r = 0$ para $\theta = \pi$ (llegando por tanto al origen). A partir de aquí repite el mismo proceso en la dirección opuesta (el radio vector crece desde $r = 0$ a $r = 4$ a medida que θ se mueve entre π y 2π).

165 Una superficie está descrita en coordenadas cilíndricas por la ecuación $3r^2 = z^2 + 1$. Convertir a coordenadas cartesianas y dibujar.

166 Escribe la ecuación de la esfera unitaria en coordenadas cilíndricas.

167 Escribe la ecuación del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 9$ en coordenadas esféricas.

■ Describir los conjuntos del espacio dados por las siguientes ecuaciones expresadas en las coordenadas indicadas:



(a) $r = 2(1 + \cos\theta)$ en cartesianas (b) $r = 2(1 + \cos\theta)$

Figura 6: Representación de curvas en polares

168 (cilíndricas) $r = 1 + \cos\theta$.

169 (cilíndricas) $z = \theta$.

170 (esféricas) $\rho = \phi$.

171 (esféricas) $\rho = 1,\ \theta = 0$.

■ Expresar los siguientes conjuntos en las coordenadas solicitadas:

172 El conjunto limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$ en coordenadas polares.

173 El conjunto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$, en coordenadas polares.

174 El plano $z = x$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

175 El cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ en coordenadas cilíndricas.

176 La superficie $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas.

177 El paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ en coordenadas cilíndricas.

178 El conjunto $\{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, en coordenadas cartesianas.

179 El conjunto de puntos (ρ, θ, ϕ) con coordenadas esféricas tales que $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, en coordenadas cartesianas.

180 El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq x \geq 0\}$ en coordenadas cilíndricas.

$\boxed{181}$ El volumen engendrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intersectado con los planos $x + y + z = 1$ y $z = 0$, en coordenadas cilíndricas.

$\boxed{182}$ La superficie del cono de radio r y altura h en coordenadas esféricas.

$\boxed{183}$ La superficie $z = x^2 - y^2$ en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Solución 177:

Se deben usar las fórmulas del cambio correspondiente, teniendo en cuenta las simplificaciones que puedan llevarse a cabo para que la nueva ecuación resultante sea lo más sencilla posible. En el caso que nos ocupa, tendremos

$$z = \frac{r^2 \cos^2\theta}{2} + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{4},$$

que simplificando resulta

$$z = \frac{r^2}{4}(1 + \cos^2\theta).$$

$\boxed{184}$ Escribe la ecuación en cilíndricas de las esferas: $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + (y-a)^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$.

$\boxed{185}$ Describir los conjuntos con $r =$ constante, $\theta =$ constante, en coordenadas polares. Análogamente para $r =$ constante, $\theta =$ constante y $z =$ constante, en coordenadas cilíndricas y $\rho =$ constante, $\theta =$ constante y $\phi =$ constante, en coordenadas esféricas.

$\boxed{186}$ Dos superficies son descritas en coordenadas esféricas por las ecuaciones $\rho = f(\theta, \phi)$ y $\rho = 2f(\theta, \phi)$. ¿Cómo se representa gráficamente la segunda superficie a partir de la primera?

187 Probar que la superficie descrita en coordenadas esféricas por la expresión $f(\rho, \phi) = 0$ es una superficie de revolución.

Solución 187:

Si consideramos un par de valores ρ_0, ϕ_0 que satisfagan la ecuación de la superficie, $f(\rho_0, \phi_0) = 0$, entonces es evidente que todos los puntos de la forma (ρ_0, ϕ_0, θ), con $0 \le \theta \le 2\pi$ satisfacen también dicha ecuación, y por lo tanto forman parte de la superficie. Dado que los puntos de la forma (ρ_0, ϕ_0, θ) forman una circunferencia sobre el plano $z = \rho_0 \cos\phi_0$, tenemos que la superficie es de revolución.

188 Dos superficies son descritas en coordenadas esféricas por las ecuaciones $f(\rho, \theta, \phi) = 0$ y $f(\rho, \theta - \pi, \phi) = 0$. ¿Cómo se representa gráficamente la segunda superficie a partir de la primera? ¿Y para $f(4\rho, \theta, \phi) = 0$?

Solución 188:

Si $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ es un punto de la primera superficie donde se supone que $\theta_0 > \pi$, entonces los puntos de la segunda superficie deberán verificar

$$\theta - \pi = \theta_0,$$

es decir

$$\theta = \theta_0 + \pi.$$

Esto significa que si rotamos la primera superficie alrededor del eje Z un ángulo π obtendremos la segunda superficie.

Del mismo modo, para la superficie $f(4\rho, \theta, \phi)$, los puntos deberán verificar

$$4\rho = \rho_0$$

luego, $\rho = \frac{\rho_0}{4}$. Es decir, esta superficie responde a una dilatación de razón $\frac{1}{4}$ respecto de la primera.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. LÍMITE Y CONTINUIDAD

Capítulo 1

En este tema se encuentran ejercicios que permiten establecer un primer contacto con las funciones de varias variables, estudiando su dominio, curvas de nivel y representación gráfica, para lo cual es preciso tener un buen manejo de los conjuntos del plano y del espacio que se han tratado en el tema anterior. Posteriormente se presenta ejercicios relacionados con el calculo de límites bidimensionales y la continuidad de funciones.

1 1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

■ Estudiar el dominio de las siguientes funciones:

189 $f(x,y) = \frac{2x - \operatorname{sen} y}{1 + \cos x}$.

190 $f(x,y) = \frac{x+y}{\tan(x+y)}$.

191 $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{(x+y)\log x}$.

192 $f(x,y) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$.

193 $f(x,y) = \frac{1}{\log x \log y}$.

194 $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

195 $f(x,y) = \log(x+y)$.

196 $f(x,y) = y^{\operatorname{sen} x}$.

197 $f(x,y) = \log(\log(x-y))$.

198 $f(x,y) = (x^2 - y)^x$.

199 $f(x,y) = \sqrt{y} \operatorname{sen} x$.

200 $f(x,y) = x + \arccos y$.

201 $f(x,y) = \log_{x+y}(xy)$.

202 $f(x,y) = \log_{2x-y}(x+3y)$.

203 $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1}$.

204 $f(x,y,z) = \frac{2x+y-z}{x^2+y^2+z^2-1}$.

205 $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2-4y^2-1}$.

206 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-2x-3}$.

207 $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y}, x^2 \operatorname{sen} \frac{y}{x}, 1 \right)$.

208 $\mathbf{F}(x,y) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} - 1}, \log(y - x^2) \right)$.

Solución:

190 El cociente que define la función $f(x, y)$ estará definido salvo cuando el denominador se anule, es decir, cuando $\tan(x + y) = 0$. Esto sucede si $x + y = k\pi$ con k un entero arbitrario. Luego el dominio será todo el plano con excepción del conjunto infinito de rectas paralelas de ecuación $x + y = k\pi$.

193 El cociente que define $f(x, y)$ deja de tener sentido cuando el denominador es nulo o no está definido. Así debemos excluir las puntos en que $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Además, debemos excluir también los puntos en que $\log x = 0$, es decir $x = 1$, y del mismo modo $y = 1$. En definitiva el dominio de esta función es la unión de los conjuntos

$$(0, 1) \times (0, 1), \quad (0, 1) \times (1, +\infty), \quad (1, +\infty) \times (0, 1), \quad (1, +\infty) \times (1, +\infty).$$

197 En este caso, debemos exigir que el argumento del primer logaritmo, $\log(x - y)$, sea un número estrictamente positivo, es decir $\log(x - y) > 0$. Esto, a su vez sucede si el argumento de este segundo logaritmo es superior a 1. El dominio será por tanto $x - y > 1$ que representa el semiplano por encima de la recta $y = x - 1$.

198 En una función definida como una potencia en que la base y el exponente son a su vez funciones, entendiéndola a través del logaritmo

$$(x^2 - y)^x = e^{x \log(x^2 - y)}$$

vemos con claridad que la única restricción que debemos imponer en este caso concreto es que el argumento del logaritmo (la base de la potencia) sea estrictamente positivo. Luego el dominio corresponderá a la región en que $x^2 - y > 0$. Se trata de la zona debajo de la parábola $y = x^2$.

202 Teniendo en cuenta la propiedad que relaciona los logaritmos naturales con los logaritmos en cualquier otra base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a},$$

podemos expresar la función $f(x, y)$ como el cociente

$$\frac{\log(x + 3y)}{\log(2x - y)},$$

y a partir de esta expresión es inmediato deducir el dominio de f,

$$(\{2x - y > 0\} \cup \{x + 3y > 0\}) - \{2x - y = 1\}.$$

209 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Hallar $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ y $f(1, 1)$. ¿Qué puntos de $\mathbb{R}^2$ verifican $f(x, y) = 0$? ¿Cuál es la imagen por f del disco de radio 2?

210 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Calcular $f(0, 0, 0)$, $f(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. ¿Dónde manda f los puntos de la superficie de la esfera unitaria? ¿Qué ocurre con los valores de f cuando $\|(x, y, z)\| \to \infty$?

■ Estudiar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

211 $f(x, y) = |x| - y$.

212 $f(x, y) = x - |y|$.

213 $f(x, y) = |x - y|$.

214 $f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$.

215 $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

216 $f(x, y) = y \operatorname{sgn}(x)$.

217 $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$.

218 $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$.

219 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

220 $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

221 $f(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

222 $f(x, y) = x + y^2$.

223 $f(x, y) = x\sqrt{y}$.

224 $f(x, y) = e^{xy}$.

225 $f(x, y) = x^y$.

226 $f(x, y) = \frac{y}{x}$.

227 $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

Solución:

213 Para esta función f las curvas de nivel corresponden a los puntos del plano que verifican $|x - y| = k$. Evidentemente $k \geq 0$, es decir, las curvas para $k < 0$ son vacías. Observemos que si $k > 0$, la igualdad $|x - y| = k$ se desdobla en las dos igualdades

$$x - y = k, \quad x - y = -k,$$

es decir la curva de nivel a altura k consta de las dos rectas paralelas anteriores. Si $k = 0$ entonces la curva de nivel correspondiente es la recta $y = x$ (Figura 1.1(a)).

216 Teniendo en cuenta que la función signo, $\operatorname{sgn}(x)$, vale 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ y 0 si $x = 0$, y razonando con un poco de calma las distintas posibilidades, no es complicado llegar a la conclusión que las curvas de nivel a altura k constan de dos partes

$$y = k,\ x > 0 \quad \text{e} \quad y = -k,\ x < 0,$$

si $k \neq 0$. Si $k = 0$, la curva de nivel es la unión de los dos ejes (Figura 1.1(b)).

225 Las curvas de nivel de esta función son aquellas de ecuación

$$x^y = k \quad \text{o} \quad e^{y \log x} = k.$$

Tomando logaritmos llegamos a

$$y = \frac{\log k}{\log x}.$$

Observamos que $k > 0$, y que el dominio de f exige $x > 0$. Distinguimos entonces tres casos según $0 < k < 1$, $k = 1$ y $k > 1$. Todas estas curvas están contenidas en el semiplano $x > 0$ y son distintas según sea $k < 1$ ó $k > 1$ (negativas o positivas, respectivamente). Para el caso $k = 1$ se obtienen las rectas $y = 0$, $x > 0$ y $x = 1$. Véase la Figura 1.1(c).

227 Las curvas de nivel de esta función corresponden a las de ecuación

$$\frac{x+y}{x^2+y^2+1} = k.$$

Si operamos en la ecuación anterior obtenemos

$$kx^2 + ky^2 - x - y + k = 0.$$

Si $k = 0$, la curva es la bisectriz $y = -x$, mientras que si k es distinto de cero, podemos dividir entre k y completar cuadrados hasta conseguir la representación

$$\left(x - \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2k^2} - 1.$$

Esta curva corresponde a una circunferencia con centro en el punto $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k})$ y radio $\sqrt{\frac{1}{2k^2} - 1}$, siempre que $\frac{1}{2k^2} - 1$ sea positivo. En caso contrario no habrá curva de nivel. En la Figura 1.1(d) están indicadas algunas de estas curvas.

228 Sea $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$, $f(0, 0) = 0$.

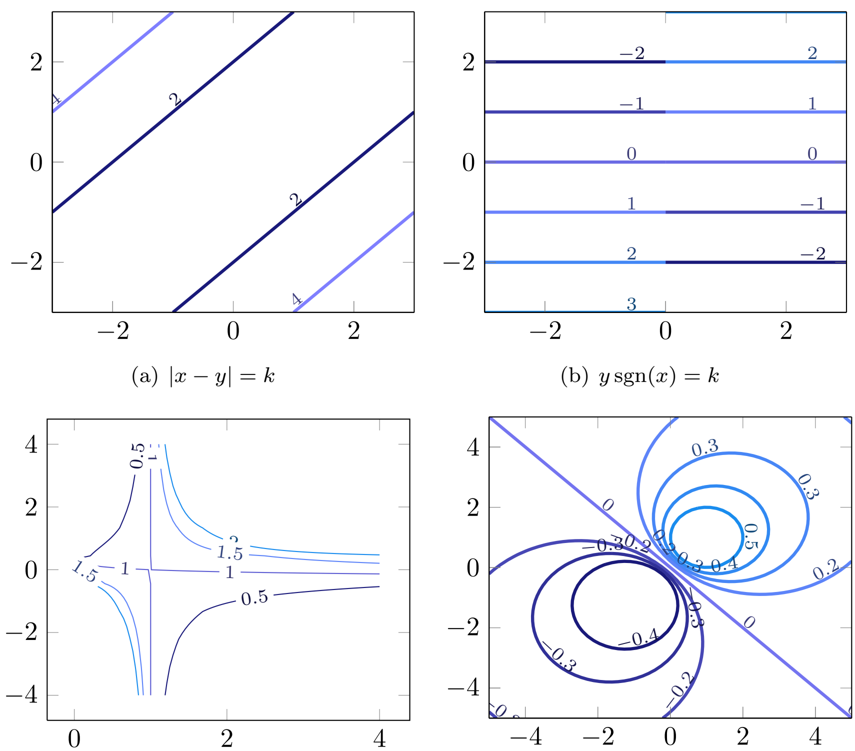
(a) Esbozar las curvas de nivel C_α para $\alpha = 0.001$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 0.9$.

(b) ¿Qué ocurre si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$?

(c) Esbozar la sección $y = 0$ (es decir, la intersección con el plano XZ).

(d) Esbozar secciones por planos verticales que pasen por el origen.

(e) Esbozar el grafo de f.



(a) $|x-y|=k$

(b) $y\,\mathrm{sgn}(x)=k$

(c) $x^y=k$

(d) $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}=k$

Figura 1: Curvas de nivel de los Ejercicios 213, 216, 225 y 227

■ Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

229 Cuyo nivel 1 sea la curva $y = \operatorname{sen} x$;

230 Cuyo nivel -7 sea la curva $y = \sqrt{x^6 + \log^8 x}$;

231 Cuyo nivel 126 sea la curva $y^4 x + x^3 y - 5 = 0$;

232 Cuyo nivel 0 sea el conjunto de puntos del interior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ (sin incluir la frontera).

■ Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con dominio el conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada una de las funciones g siguientes, hallar el dominio y su gráfica respecto de la de f.

233 $g(x, y) = f(x, y) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

234 $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$, con $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fijo.

235 $g(x, y) = f(-x, -y)$.

236 $g(x, y) = -f(x, y)$.

■ Usar los ejercicios 233–236 para esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

237 $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3$.

238 $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$.

239 $g(x, y) = (-x - 2)^2 + (-y + 3)^2$.

240 $g(x, y) = -x^2 - y^2$.

■ En $\mathbb{R}^3$ consideremos una curva en el semiplano superior del plano YZ, por ejemplo, la gráfica de una función no negativa $z = f(y)$. Si hacemos girar esta gráfica alrededor del eje Z obtenemos una superficie S en $\mathbb{R}^3$, llamada *superficie de revolución*. Obsérvese que un punto $P = (0, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la gráfica de $z = f(y)$, girará formando un círculo C alrededor del eje Z. Este círculo corresponde a una curva de nivel de la superficie S. Es decir, todos los puntos (x, y) del círculo C (viéndolo proyectado en el plano XY) deben tener la misma imagen z. La distancia de un punto cualquiera (x, y) de C al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Es claro entonces que la función cuya gráfica es la superficie de revolución S es $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

241 Considerar la parábola $z = y^2$ (en el plano YZ). Probar que la superficie de revolución que se obtiene al girar esta parábola alrededor del eje Z es el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

242 Considerar la función $z = |y|$ (en el plano YZ). Probar que la superficie de revolución que se obtiene al girar esta función alrededor del eje Z es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

243 Determinar la superficie de revolución que se obtiene al girar el semicírculo superior $z = \sqrt{a^2 - y^2}$ alrededor del eje Z.

244 Determinar la superficie de revolución que se obtiene al girar la catenaria $z = \cosh y$ alrededor del eje Z.

245 Probar que la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ es una superficie de revolución. Esbozar su gráfica.

246 ¿Podría considerarse un plano como una superficie de revolución?

Solución:

241 En este caso la función que gira es $f(y) = y^2$, de modo que la superficie de revolución que genera será

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

242 Del mismo modo que en el apartado anterior, ahora $f(y) = |y|$, luego

$$z = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

243 $f(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$ luego

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

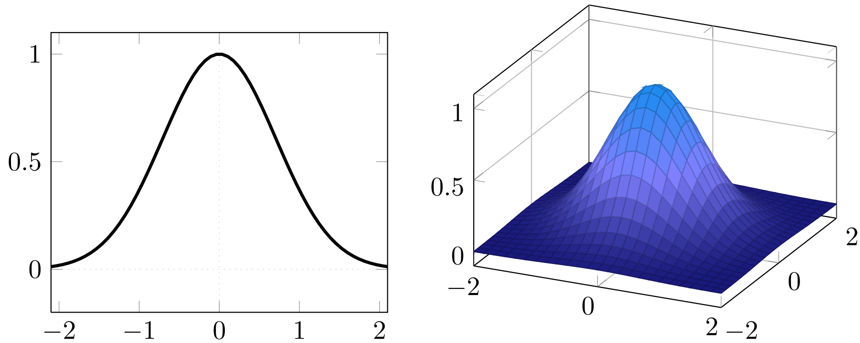
que corresponde a la superficie esférica para $z \geq 0$.

244 $f(y) = \cosh(y)$, por tanto $z = \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})$.

245 Si consideramos la función $f(y) = e^{-y^2}$ entonces la superficie de revolución que genera es precisamente $z = e^{-x^2-y^2}$. La función e^{-y^2} se esboza en la Figura 1.2(a), y la superficie de revolución generada al girar esta curva respecto del eje OZ se muestra en la Figura 1.2(b).

246 La única forma de ver un plano como superficie de revolución sería rotando una recta perpendicular al eje de giro.

■ Para cada una de las curvas siguientes situadas en uno de los planos coordenados encontrar la ecuación de la superficie generada al girar dicha curva alrededor del eje indicado. (Indicación: usar los Ejercicios 241–246).



(a) Función $f(y) = e^{-y^2}$ (b) Superficie $e^{-x^2-y^2}$

Figura 2: Ejercicio 245

247 $x = 2z^2$, eje X.

248 $4x^2 + 9y^2 = 36$, eje Y.

249 $y^2 - z^2 = 1$, eje Z.

250 $yz = 1$, eje Z.

251 $z = 2x$, eje Z.

252 $z = 2x$, eje X.

■ Esbozar la gráfica de las siguientes funciones, estudiando previamente sus curvas de nivel y secciones.

253 $f(x,y) = x + y$.

254 $f(x,y) = x^2 - y^2$.

255 $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

256 $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

257 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

258 $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

259 $f(x,y) = x^3 - x$.

260 $f(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$.

261 $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

262 $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$.

263 $f(x,y) = \log(x^2 + y)$.

264 $f(x,y) = \operatorname{sen} x$.

■ Describir las superficies de nivel de las siguientes funciones:

265 $f(x,y,z) = x + y + z$.

266 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

267 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

268 $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$.

1 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

■ Calcular los siguientes límites dobles:

269 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^2y^2.$

270 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}.$

271 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2y^2}.$

272 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}.$

273 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

274 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}.$

275 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}.$

276 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+y^6}.$

277 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}.$

278 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}.$

279 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy}.$

280 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}.$

281 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (1+|x|)^{|xy|^{-1}}.$

282 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}.$

283 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}.$

284 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}.$

285 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{x}.$

286 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y}{x-y^4}.$

287 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2+y^2}.$

288 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^3+y^3}.$

289 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{(x^2+y^2)^{-1}}.$

290 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2}.$

291 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2).$

292 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+y^2-2x+2y+2}.$

293 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^3-y^3}-1}{\operatorname{arc\,sen}(x^2+y^2+x)-\operatorname{arc\,sen} x}.$

294 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6xy^3-x^2y}{y^4+x^2}.$

295 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^3}{x+2y}$.

Solución:

271 Una de las formas más efectivas de calcular un límite doble es usar el cambio a coordenadas polares, gracias al cual es posible asegurar que si

$$\lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta) = L,$$

con independencia del ángulo θ, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

En este caso podemos escribir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2},$$

y escribiendo todas las expresiones en coordenadas polares llegamos a que el límite que nos interesa es el producto

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2} \cdot \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}.$$

El primer factor tiene límite 1, mientras el segundo tiene límite $+\infty$ con independencia de cómo sea la función θ. En consecuencia el límite solicitado es $+\infty$.

275 Una forma muy cómoda de convencerse de que el límite solicitado es nulo consiste en usar la desigualdad

$$|2ab| \le a^2 + b^2,$$

válida para cualesquiera a, b. En particular

$$\left|2xy^2\right| \cdot |y| \le \left(x^2+y^4\right)|y|.$$

Luego

$$\left|\frac{2xy^3}{x^2+y^4}\right| \le |y|,$$

y como $|y| \to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$, concluimos que el límite pedido es nulo.

Otro modo de llegar a la misma conclusión consiste en analizar el límite en coordenadas polares, teniendo que examinar el límite

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^4\theta},$$

donde $\theta = \theta(r)$ puede ser cualquier función arbitraria. Si $\cos^2\theta$ no converge a cero, el límite anterior es claramente nulo. Si se tiene que $\cos^2\theta \to 0$, tomando

$$\frac{\cos\theta}{r} \to a,$$

observamos que, dividiendo numerador y denominador entre r^2 en la expresión anterior, el limite sería nulo pues el denominador tiende a $1+a^2$ mientras el numerador tiende a cero. Si a resulta ser infinito, entonces

$$\frac{r}{\cos\theta} \to 0,$$

y en este caso, dividiendo entre $\cos^2\theta$, llegamos a la misma conclusión sobre el límite.

289 Para este ejercicio, basta observar que con el cambio a polares y tomando $s = \frac{1}{r^2}$, se debe estudiar

$$\lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s.$$

Conocemos bien que este límite es el número e.

293 En primer lugar obsérvese que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^3-y^3}-1}{x^3-y^3} = \frac{1}{2}.$$

Para darse cuenta de ello considérese la función $f(t) = \sqrt{1+t}$ y nótese que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Poniendo $t = x^3 - y^3$ se obtiene el resultado.

Del mismo modo, para $f(t) = \operatorname{arc\,sen}(t)$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x^2+y^2+x) - \operatorname{arc\,sen} x}{x^2+y^2} = 1.$$

De este modo el límite solicitado será $\frac{1}{2}$ multiplicado por

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},$$

y este limite es nulo, lo cual es inmediato de comprobar. En consecuencia el límite solicitado es también nulo.

295 Puesto que tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ podemos factorizar el polinomio del numerador dividiendo por $x+2y$, de modo que

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+2x^2y-xy^2-2y^2}{x+2y} \\
&\qquad = \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x+2y)(x^2-y^2)}{x+2y} = 3.
\end{aligned}$$

296 Estudiar el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} \int_0^{x^2y} \frac{dt}{1+t^4}.$$

Solución 296:

Basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{x^2+y^2} \int_0^{x^2y} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \frac{1}{x^2y} \int_0^{x^2y} \frac{dt}{1+t^4}.$$

El primer factor tiene límite nulo, lo cual es sencillo de comprobar planteándolo en polares; mientras que el segundo factor tiene límite 1 por el teorema fundamental del Cálculo.

■ Calcular los siguientes límites:

297 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}.$

298 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}.$

299 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}.$

■ Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

300 $\log(2x+3y)$.

301 $f(x,y)=\tan(x^4-y^4)$.

302 $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\boxed{\mathbf{303}}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

304 $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y} & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}.$

$\boxed{\mathbf{305}}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{306}}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4x^2+y^2-1} & \text{si } 4x^2+y^2-1 \neq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{307}}$ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x \geq 0, \\ 3x+y^2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{308}}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^y+2x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

309 $\mathbf{F}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+|y|}, \text{sen}(x+y)\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solución:

304 Está claro que en los puntos que no pertenecen a los ejes, la función es continua por ser composición de funciones continuas. Cuando nos preocupamos por la continuidad de f en un punto del eje X, del tipo $(a,0)$ para a no nulo, comprobamos que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y)\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{y}$$

no existirá, pues el factor $\text{sen}(\frac{1}{y})$ oscila de manera persistente cuando nos acercamos a cero, a no ser que la amplitud $(x+y)$ converja a cero y en tal caso anule tales oscilaciones (lo que no puede ocurrir pues hemos tomado inicialmente $a \neq 0$), o bien cuando el factor $\text{sen}(\frac{1}{x})$ sea nulo, lo que sí sucede para los valores $x = \frac{1}{k\pi}$. Así pues hay continuidad en los puntos $(a,0)$ con $a = \frac{1}{k\pi}$. Lo mismo sucede en los puntos $(0,a)$ con $a = \frac{1}{k\pi}$. En el resto de puntos de los ejes, la función no es continua.

Finalmente, estudiamos qué sucede en el origen. En este caso, tenemos oscilaciones bruscas de los dos factores senoidales. Sin embargo como estas oscilaciones están acotadas por la unidad, y el factor amplitud $(x+y)$ sí converge a cero, resulta que el límite es nulo, y por tanto la función es continua en el origen. De manera más precisa diríamos

$$0 \leq \left|(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \to 0$$

si $(x,y)\to(0,0)$.

309 Fuera del origen ninguna de las funciones componentes presenta problemas de continuidad por lo que se trata de estudiar el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ de las dos componentes de la función vectorial. La segunda componente es evidentemente continua. Con respecto a la primera debemos estudiar si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+|y|}$$

existe y es nulo. Planteando el límite en coordenadas polares es directo comprobar que esto es, efectivamente, así.

310 ¿Es posible redefinir la función

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

para que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$?

311 Supongamos que $f(x,y)$ es continua en (x_0,y_0). Probar que la función $g(x)=f(x,y_0)$ es continua en x_0.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CÁLCULO DIFERENCIAL

Capítulo 2

Presentamos aquí una serie de ejercicios relacionados con el cálculo diferencial de funciones de varias variables. Siguiendo la pauta del tema anterior, los ejemplos aquí recogidos se refieren esencialmente a funciones de dos o tres variables, aunque las técnicas y razonamientos se pueden llevar sin dificultad a dimensiones superiores. Primero presentaremos diversos ejercicios sobre derivación parcial, derivadas direccionales, diferenciabilidad, regla de la cadena, así como aplicaciones de estos conceptos. Y finalmente, una breve sección tratará también un uso sencillo del teorema de la función implícita y la fórmula de Taylor de orden dos.

2 1 DERIVADAS PARCIALES

■ Encontrar en cada caso las derivadas parciales f_x y f_y para las funciones:

312 $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.

313 $f(x, y) = \cos(y\sqrt{x}) \operatorname{sen}(x\sqrt{y})$.

314 $f(x, y) = 7x^2 - \log(\cos x \cos y)$.

315 $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$.

316 $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

■ Evaluar las derivadas parciales de las funciones dadas en los puntos indicados:

317 $f(x, y) = e^{ax} \cos(bx + y)$, $(\frac{2\pi}{b}, 0)$.

318 $f(x, y) = (4cx^2)^y - (4cy^2)^x$, $(c, \frac{c}{2})$.

319 $f(x, y) = e^{xy} \operatorname{sen}(x + y)$, $(0, 0)$.

320 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3+y^3}$, $(-1,2)$.

321 $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(0,0)$, $(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, con $a>0$.

■ Calcular las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes:

322 $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{xy} g(t)\,dt$.

323 $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^y}^{y^x} g(t)\,dt$.

324 $f(x,y) = \displaystyle\int_{\int_y^x g(t)\,dt}^{\int_x^y g(t)\,dt} g(t)\,dt$.

Solución 324:

Debemos usar el teorema fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena con un poco de precaución para no confundirnos en los cálculos. Se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right)(-g(x)) - g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)g(x);$$

o factorizando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)\left(g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right) + g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)\right).$$

Del mismo modo tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)\left(g\left(\int_x^y g(t)\,dt\right) + g\left(\int_y^x g(t)\,dt\right)\right).$$

325 Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y positiva. Considérese la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$$

(a) ¿Para qué puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x,y)>0$?

(b) ¿Para qué puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que $f(x,y)<0$?

(c) ¿Cuál es el nivel cero de f?

(d) Calcular las derivadas parciales de la función f.

(e) Realizar los apartados ((a))–((c)) suponiendo ahora que g es una función impar tal que $g(t)>0$ para $t>0$.

326 Para $f(x,y)=e^{xy}$ mostrar que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

327 Hallar α tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, con $f(x,y)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y+\alpha\cos x\cos y$.

Solución 327:

Después de calcular las dos derivadas parciales de f e igualar las expresiones obtenidas, llegamos a

$$\cos x\operatorname{sen}y-\alpha\operatorname{sen}x\cos y=\cos y\operatorname{sen}x-\alpha\operatorname{sen}y\cos x.$$

De aquí es fácil concluir que $\alpha=-1$.

328 Calcular las derivadas parciales de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solución 328:

Fuera del origen la función f está definida y es derivable. Las derivadas parciales se calculan con un poco de paciencia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3\cos(x^3y^2)x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4\sin(x^3y^2)x}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2\cos(x^3y^2)x^3y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4\sin(x^3y^2)y}{(x^2+y^2)^3}.$$

En el origen debemos calcular la derivada parcial respecto de x mediante el límite

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

pero este cociente es nulo si $h\neq0$, y en consecuencia el límite anterior también. Así

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

Lo mismo sucede con la derivada parcial respecto a y.

329 Probar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\partial}{\partial z}\left((x^2+y^2+z^2)^{1/3}\right)$$

no existe.

■ Calcular el gradiente de las siguientes funciones:

330 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$.

331 $f(x,y) = xe^{xy^3+3}$.

332 $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-z^2-x-y}$.

333 $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

■ Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

334 $f(x,y) = x+2xy-3y^2$, $(x_0,y_0)=(1,2)$, $\mathbf{n}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

335 $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $(x_0,y_0)=(-1,0)$, $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$.

336 $f(x,y) = x^y - y^x$, $(x_0,y_0)=(e,e)$, $\mathbf{n}=(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$.

337 $f(x,y) = (x-1)y^2e^{xy}$, $(x_0,y_0)=(0,1)$, $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)$.

338 $f(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2$, $(x_0,y_0)=(a,b)$, $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,a)$.

339 $f(x,y,z) = e^x+yze^y$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,-1)$, $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

340 ¿En qué dirección la derivada direccional de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

en el punto $P=(1,1)$, es igual a cero?

341 Determina un vector unitario $\mathbf{n}$ de modo que la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=\frac{1-xy}{z}$ en el punto $(1,1,1)$ y en la dirección pedida sea $-\sqrt{2}$.

Solución 341:

Es directo conseguir que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, \frac{xy-1}{z^2}\right),$$

y por tanto

$$\nabla f(1,1,1) = (-1,-1,0).$$

Puesto que para una función diferenciable, la derivada direccional viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x_0) = \nabla f(x_0)\cdot\mathbf{n},$$

el vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ debe verificar

$$(-1, -1, 0) \cdot (n_1, n_2, n_3) = -\sqrt{2}, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

De la primera condición se obtiene

$$n_1 = \sqrt{2} - n_2,$$

y llevándola a la segunda ecuación,

$$1 - 2\sqrt{2}n_2 + 2n_2^2 + n_3^2 = 0.$$

Completando cuadrados, podemos escribir

$$2\left(n_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + n_3^2 = 0.$$

La única posibilidad es que

$$n_3 = 0, \quad n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

342 La derivada direccional de una función diferenciable $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ toma los valores 3, 1 y -1 en la dirección de los ejes coordenados X, Y, Z, respectivamente. Encontrar el valor de $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

343 La derivada direccional de una función diferenciable $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x_0, y_0, z_0)$ toma los valores 3, 1 y -1 en la dirección de los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$, respectivamente. Encontrar el valor del gradiente de f en el punto (x_0, y_0, z_0).

Solución 343:

La información que nos proporcionan, si ponemos

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (a, b, c),$$

es

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (0, 1, 1) &= 3, \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) &= 1, \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) &= -1. \end{aligned}$$

Se trata por tanto de determinar el vector (a, b, c) a partir de esta información. En definitiva, debemos resolver el sistema lineal anterior. Los valores que se obtiene son

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{5}{2}.$$

344 Si $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ denota la altura de una montaña, ¿en qué dirección desde $(1,0)$ se debería comenzar a caminar para escalar más rápidamente?

345 Determinar el camino de mayor inclinación de la superficie dada por $f(x,y) = a^2x^2 + b^2y^2$ partiendo del punto $(a, b, a^4 + b^4)$.

■ Encontrar un vector normal de cada una de las siguientes curvas en el punto dado:

346 $\sqrt{x^2 - y^2} = 1$, $(\sqrt{2}, 1)$.

347 $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{6}$, $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

348 $xe^{xy} = 2e$, $(2, \frac{1}{2})$.

349 $\arctan(xe^y) = \frac{\pi}{4}$, $(1, 0)$.

■ Encontrar la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos dados:

350 $xy^2 = 1$, $(\frac{1}{4}, 2)$.

351 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 5$, $(2, -1)$.

352 $xe^{xy} = 2$, $(2, 0)$.

353 $(x + y)\arctan(xy) = \frac{5\pi}{8}$, $(2, \frac{1}{2})$.

354 Probar que las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ son perpendiculares a las curvas de nivel de $g(x,y) = \frac{y}{x}$ en todos sus puntos.

Solución 354:

Recuérdese que dos curvas son perpendiculares en un punto si lo son sus rectas tangentes en dicho punto. Equivalentemente, dos curvas serán perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales. Basta entonces comprobar que los vectores gradiente de f y de g son perpendiculares en todo punto. En efecto

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \nabla g = (-\tfrac{y}{x^2}, \tfrac{1}{x}),$$

y entonces es inmediato que

$$\nabla f \cdot \nabla g = 0,$$

en todo punto.

355 Probar que la recta tangente a una cónica $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ en el punto (x_0,y_0) tiene por ecuación

$$Ax_0x+By_0y+\frac{C}{2}(x+x_0)+\frac{D}{2}(y+y_0)+E=0.$$

Solución 355:

Si el punto (x_0,y_0) debe pertenecer a la cónica, tendremos

$$Ax_0^2+By_0^2+Cx_0+Dy_0+E=0.$$

El vector normal a dicha cónica en el punto (x_0,y_0) vendrá dado por el gradiente en dicho punto

$$(2Ax_0+C,2By_0+D).$$

Por lo tanto la recta tangente consta de todos los puntos cuya diferencia a (x_0,y_0) es perpendicular al vector anterior, es decir, tendrá ecuación

$$(2Ax_0+C,2By_0+D)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0.$$

Si desarrollamos y usamos la ecuación primera, después de unas cuantas manipulaciones llegamos a que la ecuación de dicha recta es

$$Ax_0x+By_0y+\frac{C}{2}(x+x_0)+\frac{D}{2}(y+y_0)+E=0.$$

356 Considerar la función

$$f(x,y)=\frac{1+\operatorname{sen}(e^x)}{1-\cos(e^y)}.$$

(a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(\log\pi,\log\pi)$.

(b) Calcular la derivada direccional en el punto anterior y en la dirección dada por el vector $\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3},-\sqrt{7})$.

Solución 356:

(a) La ecuación del plano tangente al grafo de una función en un punto (x_0,y_0) se escribe como:

$$z-f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0).$$

Por tanto, para determinar la ecuación del plano tangente necesitamos el vector gradiente y el valor de la función en dicho punto. En concreto

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{e^x\cos(e^x)}{1-\cos(e^y)},-\frac{e^y\operatorname{sen}(e^y)(1+\operatorname{sen}(e^x))}{(1-\cos(e^y))^2}\right).$$

En el punto pedido, tenemos

$$\nabla f(\log \pi, \log \pi) = (-\tfrac{\pi}{2}, 0), \quad f(\log \pi, \log \pi) = \tfrac{1}{2},$$

y la ecuación del plano tangente será

$$-\frac{\pi}{2}(x - \log \pi) = z - \frac{1}{2}.$$

(b) Para encontrar la derivada direccional dada, puesto que la función es diferenciable en ese punto, debemos hacer el producto escalar del vector gradiente en el punto concreto y el vector unitario que determina la dirección, es decir,

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3}, -\sqrt{7}) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}.$$

■ Encontrar la ecuación del plano tangente a las siguientes funciones en los puntos dados:

357 $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2}$ en $(1,0), (0,1), (-1,1), (0,0)$.

358 $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$ en $(-\pi, 0), (0, \pi)$.

359 $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y$ en $(0, \frac{\pi}{2})$.

360 $f(x,y) = x - y + 2$ en $(1,1)$

361 $f(x,y) = \log(x \cos y) + \arctan(x+y)$ en $(1,0)$

362 $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ en $(0,0)$

363 $f(x,y) = axy$ en $(1, \frac{1}{a})$

364 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ en $(1,-1)$.

■ Para cada apartado de los Ejercicios 357–364 calcular el vector normal a la superficie $f(x,y)$ en los puntos indicados.

365 Probar que las gráficas de $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ son tangentes en el origen.

366 ¿En qué punto, o puntos, el plano tangente al grafo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ es horizontal (paralelo al plano del suelo)?

367 ¿En qué punto el plano tangente al grafo de la función $f(x,y) = 9 - 4x^2 - y^2$ es paralelo al plano $z = 4y$?

368 Encontrar los puntos de la superficie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ que tienen su plano tangente perpendicular al vector $(1, 1, \sqrt{3})$.

369 Probar que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Encontrar ecuaciones similares para el hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$, $k \neq 0$, y el paraboloide $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Solución 369:

El vector normal al elipsoide en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right).$$

En consecuencia la ecuación del plano tangente deberá expresar que el vector anterior debe ser normal a dicho plano tangente y pasar por (x_0, y_0, z_0)

$$2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Esto se puede desarrollar como

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Sin embargo, como (x_0, y_0, z_0) es un punto del elipsoide, debemos tener

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

de modo que la ecuación del plano se simplifica a

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

De la misma manera, es sencillo obtener las ecuaciones

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = k$$

y

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z + z_0}{2} = 0,$$

para los planos tangentes al hiperboloide y al paraboloide de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

respectivamente.

370 El plano tangente a la superficie $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) interseca a los ejes coordenados en $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$. Probar que la cantidad $a + b + c$ es independiente del punto de tangencia.

371 Probar que para $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, f_x y f_y son ambas nulas en el origen. ¿Tiene la gráfica plano tangente en el origen?
(Ayuda: considérese la sección por el plano $x - y = 0$).

372 Sea g una función diferenciable de una variable y $f(x, y) = xg(\frac{y}{x})$. Probar que todo plano tangente al grafo de f pasa por el origen.

Solución 372:

Como vimos en el Ejercicio 356, la ecuación del plano tangente al grafo de una función en un punto (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = z - f(x_0, y_0).$$

Si cualquiera de estos planos debe pasar por el origen deberíamos tener

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x_0, y_0) = f(x_0, y_0).$$

Luego en el caso concreto en que $f(x, y) = xg(\frac{y}{x})$ todo se reduce a comprobar que

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y).$$

lo cual se tiene pues

$$\nabla f(x, y) = \big(g(\tfrac{y}{x}) - \tfrac{y}{x} g'(\tfrac{y}{x}), g'(\tfrac{y}{x})\big)$$

■ Comprobar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar su diferencial en un punto arbitrario:

373 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^4 - y^4$.

374 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = (2, x + y)$.

375 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y) = (2 + x + y, x^2 + y^2, e^{xy})$.

376 Dada la función:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \qquad f(0, 0) = 0,$$

comprobar que admite derivadas direccionales en el origen según cualquier vector unitario (v_1, v_2). ¿Es f diferenciable en el origen?

Solución 376:

Es inmediato comprobar que f es continua en el origen estudiando el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ mediante coordenadas polares. Por otro lado los límites que definen las derivadas parciales en el origen son triviales, obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Para comprobar si f es diferenciable en el origen deberíamos preocuparnos por decidir si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

existe y es nulo. Si no existe o no es nulo, la función no será diferenciable en el origen. En concreto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3.$$

El límite dentro del cubo no existe, lo cual es evidente si lo escribimos en coordenadas polares. En consecuencia la función no es diferenciable en el origen.

377 Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - (y - 1)^3}{x^2 + (y - 1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1); \end{cases}$$

en el punto $(0, 1)$.

378 Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

379 Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(a) Estudiar la existencia de derivadas direccionales de f en el origen.

(b) Calcular el vector gradiente de f en el $(0,0)$.

(c) Usando los apartados anteriores, decidir si al función f es o no diferenciable.

380 Probar que la función $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ no posee derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ para todo vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$. ¿Es f diferenciable en el origen? ¿Es f continua en $(0,0)$?

381 Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \beta & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde α y β son números reales cualesquiera. ¿Es posible encontrar una relación entre α y β para que existan las derivadas parciales de f en $(0,0)$? En caso afirmativo, ¿Cuánto valen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$? ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución 381:

Si escribimos los límites que proporcionan las derivadas parciales, encontramos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\beta}{h},$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha-\beta}{h}.$$

Para que estos límites existan no queda más remedio que tomar $\beta = \alpha$, en cuyo caso ambas derivadas parciales son nulas. Si además $\alpha = \beta = 0$, la función es idénticamente nula y por tanto trivialmente diferenciable. Sin embargo, si $\alpha = \beta \neq 0$, la función no puede ser diferenciable en el origen pues el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe. Basta tomar $y = tx$ con t constante para observar que el límite anterior vale

$$\frac{\alpha\,(1+|t|)}{\sqrt{1+t^2}},$$

que claramente depende del parámetro t. De este modo la función no es continua en el origen, y por tanto tampoco diferenciable.

382 Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostrar que f_x y f_y existen en todo punto, pero f no es continua en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en este punto?

■ Estudiar la diferenciabilidad en todo $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

383 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

384 $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

385 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

386 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2-y^2-1}}{x-y} & \text{si } y \neq x, \\ 2x & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Solución: 384:

Usando directamente la definición, es sencillo encontrar que las dos derivadas parciales en el origen son nulas. Por tanto, para comprobar si esta función es diferenciable en dicho punto debemos examinar si el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

existe y es nulo. Esto es así pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Nótese que el seno siempre está acotado por 1 en valor absoluto, y el factor $\sqrt{x^2+y^2}$ tiende a cero. Por tanto la función es diferenciable en

el origen. Fuera del origen la función admite derivadas parciales que son continuas,

$$f_x = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f_y = 2y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2};$$

luego también es diferenciable.

2 2 REGLA DE LA CADENA Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

■ Verificar la regla de la cadena en cada caso para $f \circ c$ y $c \circ f$:

387 $f(x, y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$.

388 $f(x, y) = e^{xy}$, $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$.

389 $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (t, -t)$.

390 Sea $f(x, y) = g(x + 2y^2)$ donde g es una función conocida de una variable. Razonar si es correcta la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

391 Dada la función $f(x, y, z) = \displaystyle\int_{x+z^2}^{x^2+y} h(s)\, ds$, donde h es una función cualquiera de una variable, decidir y razonar si es cierto

$$2z\frac{\partial f}{\partial x} = 4xz\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Solución 391:

Mediante la regla de la cadena y el teorema fundamental del Cálculo encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xh(x^2 + y) - h(x + z^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = h(x^2 + y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2zh(x + z^2).$$

Por lo tanto la expresión

$$2z\frac{\partial f}{\partial x} - 4xz\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}$$

queda idénticamente igual a cero.

392 Sea $f(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct)$ con c una constante y g y h funciones de una variable. Probar que f satisface la *ecuación de ondas*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

393 Comprueba que la función

$$u(x,y) = \int_{xy}^{x^2y^2} g(t)\,dt$$

es solución de la ecuación $xu_x - yu_y = 0$.

394 Sean las funciones:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad f(0,0)=0,$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad g(x) = x.$$

Se pide:

(a) Probar que existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y valen cero.

(b) ¿Es f continua en $(0,0)$?

(c) Se considera la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x,g(x))$. Calcular $h'(0)$, directamente y mediante la regla de la cadena.

(d) Concluir del apartado anterior que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución 394:

(a) Directamente de la definición se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$

y lo mismo para la parcial respecto a y. Ambas son nulas.

(b) La función f sí es continua en el origen pues

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

(véase el Ejercicio 275) y en consecuencia

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x| \to 0$$

si $(x, y) \to (0, 0)$. El limite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ es nulo, y coincide con el valor de la función.

(c) Por sustitución directa encontramos que

$$h(x) = \frac{x}{2},$$

de modo que $h'(0) = \frac{1}{2}$. Si usamos la regla de la cadena, tendremos

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x).$$

Cuando $x = 0$,

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

por (a).

(d) La función f no puede ser diferenciable en el origen pues si lo fuera los dos modos de calcular la derivada $h'(0)$ del apartado anterior deberían haber coincidido.

395 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $g(\rho, \theta, \phi) = f(x, y, z)$, donde

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Calcular g_ρ, g_θ y g_ϕ y aplicarlo a la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

■ Escribir la regla de la cadena para cada caso

396 $h(x, y) = f(x, u(x, y))$, h_x.

397 $h(t) = f(t, u(t), v(t))$, h'.

398 $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$, h_x.

399 $\mathbf{F}(x, y) = (g_1(h(x, xy, x^2), xy), g_2(\cos(x^2 + y^2), \operatorname{sen}(x^2 y)))$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$.

400 Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

$$g(x, y) = f_{,1}(f(x, y), y) + f_{,2}(x, f(x, y)),$$

encontrar g_x y g_y.

401 Sea F una función de una variable y f una función de dos variables. Probar que el gradiente de $g(x, y) = F(f(x, y))$ es paralelo al gradiente de $f(x, y)$.

402 Usar la regla de la cadena con la función $f(y, z) = y^z$ para calcular $\frac{d}{dx}(x^x)$. Aplicarlo también al cálculo de $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ y $\operatorname{sen} x^{\cos x}$.

403 Expresar las coordenadas polares r y θ en función de las coordenadas cartesianas y encontrar la matriz de derivadas parciales $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$.

■ Sea $g(u, v)$ una función diferenciable y u, v funciones de x e y.

404 Probar que

$$g_{xx} = g_u u_{xx} + g_v v_{xx} + g_{uu} u_x^2 + 2 g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2$$

405 Encontrar expresiones similares para g_{yy} y g_{xy}.

Solución:

404 En primer lugar tenemos para las derivadas parciales primeras de

$$G(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)),$$

que

$$G_x = g_u u_x + g_v v_x, \quad G_y = g_u u_y + g_v v_y,$$

y derivando de nuevo estas expresiones respecto a x e y, encontramos mediante la regla del producto,

$$G_{xx} = (g_{uu} u_x + g_{uv} v_x) u_x + g_u u_{xx} + (g_{vu} u_x + g_{vv} v_x) v_x + g_v v_{xx},$$

y agrupando términos

$$G_{xx} = g_{uu} u_x^2 + 2 g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2 + g_u u_{xx} + g_v v_{xx}.$$

405 Del mismo modo se llega a

$$G_{xy} = g_{uu} u_x u_y + g_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + g_{vv} v_y v_x + g_u u_{xy} + g_v v_{xy},$$
$$G_{yy} = g_{uu} u_y^2 + 2 g_{uv} u_y v_y + g_{vv} v_y^2 + g_u u_{yy} + g_v v_{yy}.$$

406 Si $z = \dfrac{f(x-y)}{y}$ probar que $z + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

■ Verificar en cada caso que las funciones que se dan satisfacen la condición especificada:

407 $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ verifica $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

408 $\phi(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$, con f y g funciones cualesquiera, verifica $\phi_{xx} = \phi_{tt}$.

409 $f(x,y,z) = ze^{xy} + yz^3x^2$ verifica $f_{xyz} = f_{zyx}$.

410 $g(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}$, con f una función cualquiera, verifica

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

411 Sea $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + yz^2$. Encontrar f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} y f_{xyz}.

■ Calcular todas las segundas derivadas parciales de:

412 $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$.

413 $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + e^{-y}}$.

414 Sea $z = x^4y^3 - x^8 + y^4$. Calcular $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$, $\dfrac{\partial z^3}{\partial x \partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial y}$.

■ Una función $u = f(x,y)$ con derivadas segundas continuas que satisface la *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se dice *función armónica*. Probar que las siguientes funciones son armónicas:

415 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

416 $u(x,y) = xy$.

417 $u(x,y) = x^2 - y^2$.

418 $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$.

419 $u(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$.

420 $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.

421 Probar que si $f(x,y)$ es una función armónica (cf. Ejercicios 415–420) entonces la función $g(x,y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ también es armónica. (Ayuda: obsérvese que $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ son funciones armónicas).

Solución 421:

A partir de la información de que la función $f(x,y)$ es armónica, y la indicación de que

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

son armónicas, se trata de concluir que la composición

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

también es armónica. En efecto, usando el cálculo efectuado en los problemas 404–405, podemos escribir

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} =& f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + f_{vv}v_x^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx} \\ &+ f_{uu}u_y^2 + 2f_{uv}u_yv_y + f_{vv}v_y^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}, \end{aligned}$$

y factorizando de manera apropiada

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} =& f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2f_{uv}(u_xv_x + u_yv_y) \\ &+ f_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned}$$

También podemos escribir

$$g_{xx} + g_{yy} = f_{uu}\left|\nabla u\right|^2 + 2f_{uv}\nabla u \cdot \nabla v + f_{vv}\left|\nabla v\right|^2 + f_u\Delta u + f_v\Delta v.$$

Ahora bien, a partir de la identidad

$$v(x,y) = -u(y,x)$$

es sencillo comprobar que

$$\left|\nabla u\right|^2 = \left|\nabla v\right|^2, \quad \nabla u \cdot \nabla v = \Delta u = \Delta v = 0,$$

y en consecuencia

$$g_{xx} + g_{yy} = \Delta f\left|\nabla u\right|^2$$

que es también cero pues f es armónica. Luego g es armónica.

422 La *ecuación del calor* en dos dimensiones se escribe

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}).$$

Probar que una solución de esta ecuación viene dada por la función

$$u(t,x,y) = e^{-(m^2+n^2)kt}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(ny),$$

donde m y n son constantes cualesquiera.

$\boxed{\mathbf{423}}$ Sea $u(x, y)$ una función diferenciable que verifica $xu_x + yu_y = 0$. Si se hace el cambio a coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad U(r, \theta) = u(x, y),$$

encontrar la ecuación que verifica la función $U(r, \theta)$.

424 Considerar la función

$$f(x, y) = (2 + \operatorname{sen} x)^{y^2}.$$

(a) Calcula y simplifica la segunda derivada parcial mixta de f.

(b) Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$.

(c) Calcula la derivada direccional de f en la dirección dada por el vector $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{122}}, \frac{-11}{\sqrt{122}})$ en el punto $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$.

(d) Si $g(x) = f(x^2, u(x))$ para una cierta función u, calcula $g'(x)$.

Solución 424:

(a) Entendiendo la función $f(x, y)$ como

$$f(x, y) = e^{y^2 \log(2+\operatorname{sen} x)}$$

(notando que $2 + \operatorname{sen} x > 0$ para todo x) es sencillo encontrar la derivada solicitada. Después de unos cuantos cálculos

$$f_{xy} = 2y\cos x \left(1 + y^2 \log(2 + \operatorname{sen} x)\right) (2 + \operatorname{sen} x)^{y^2-1}.$$

(b) Para la ecuación del plano tangente, necesitamos el valor de la función y el gradiente en el punto pedido. En concreto

$$\nabla f = \left(y^2 \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^{y^2-1}, 2y\log(2 + \operatorname{sen} x)(2 + \operatorname{sen} x)^{y^2}\right),$$

y

$$f(-\tfrac{\pi}{2}, \pi^2) = 1, \quad \nabla f(-\tfrac{\pi}{2}, \pi^2) = (0, 0),$$

de modo que el plano tangente es $z = 1$.

(c) Puesto que el gradiente es nulo en $(-\frac{\pi}{2}, \pi^2)$ por el apartado anterior, y la función es diferenciable, cualquier derivada direccional será también nula.

(d) Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g'(x) =& f_x 2x + f_y u'(x) \\ &= 2x(u(x))^2 \cos(x^2) \left(2 + \operatorname{sen}(x^2)\right)^{(u(x)^2-1)} \\ &\quad + 2u(x)u'(x) \left(2 + \operatorname{sen}(x^2)\right)^{(u(x))^2} \log\left(2 + \operatorname{sen}(x^2)\right) \end{aligned}$$

425 Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si $(x,y) \neq (0,0)$ calcular f_x, f_y.
(b) ¿Cuál es el valor de $f(x,0)$ y $f(0,y)$?
(c) Mostrar que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
(d) Probar que $f_x(0,y) = -y$ si $y \neq 0$.
(e) Calcular $f_y(x,0)$ para $x \neq 0$.
(f) Probar que $f_{yx}(0,0) = 1$ y $f_{xy}(0,0) = -1$.

426 Se dice que una función $f(x,y)$ es *homogénea de grado* n si satisface la *fórmula de Euler*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y). \qquad (*)$$

Se pide:

(a) Probar que la función $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado 0, cualquiera que sea g, función de una única variable.
(b) Sea $f(x,y)$ homogénea de grado m, $g(x,y)$ y $h(x,y)$ homogéneas de grado n. Probar que $z(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$ es homogénea de grado mn.
(c) Otra forma de definir la homogeneidad es la siguiente: $f(x,y)$ es homogénea de grado n si verifica

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y). \qquad (**)$$

Probar que si f satisface esta condición, entonces verifica $(*)$. (Ayuda: derivar con respecto a t en $(**)$).
(d) Probar el recíproco del apartado anterior, es decir, si $f(x,y)$ satisface la condición $(*)$ entonces también verifica $(**)$.
(Ayuda: usar que si $g'(t) = n\frac{g(t)}{t}$ entonces $g(t) = ct^n$).

Solución 426:

(c) Supongamos que $f(x,y)$ satisface

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

para cualquier par (x,y) y cualquier real t. Si derivamos la identidad anterior con respecto a t, tendremos

$$xf_x(tx,ty) + yf_y(tx,ty) = nt^{n-1}f(x,y).$$

En particular para $t = 1$, llegamos a

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

(d) A la inversa, supongamos que $f(x, y)$ es tal que

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

para todo par (x, y). Para un tal punto fijo, consideremos la función

$$g(t) = f(tx, ty).$$

Si calculamos su derivada

$$g'(t) = xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty),$$

y por la igualdad que verifica f para el par (tx, ty) tendremos

$$g'(t) = \frac{1}{t}\left(txf_x(tx, ty) + tyf_y(tx, ty)\right) = \frac{n}{t}f(tx, ty) = \frac{n}{t}g(t).$$

Luego $g(t)$ es una función que verifica la ecuación

$$g'(t) = \frac{n}{t}g(t).$$

No es difícil convencerse de que las únicas funciones que satisfacen esta regla son

$$g(t) = ct^n$$

donde c es una constante (con respecto a t). Para determinar esa constante ponemos $t = 1$ y llegamos a que

$$f(tx, ty) = g(t) = t^n f(x, y).$$

■ Verificar que las siguientes funciones satisfacen la fórmula de Euler (cf. Ejercicio 426) y encontrar en cada caso su grado:

427 $f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$.

428 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

429 $f(x, y) = (x + y)^3$.

430 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

2 3

DERIVACIÓN IMPLÍCITA. POLINOMIO DE TAYLOR.

- Hallar las derivadas y' que se piden en cada caso mediante derivación implícita:

431 $y^3x + y^2x^2 - 1 = 0$, en el punto $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$.

432 $x^y + y^x = 2$, en el punto $(1, 1)$.

433 $x^2 - 3xy - y^2 = 3$, en el punto $(1, -1)$.

434 $y + e^x \log y = 1$, en el punto $(2, 1)$.

- Encontrar la ecuación del plano tangente en el punto dado al grafo de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por

435 $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 3 = 0$ en $(-1, 1, 1)$.

436 $xe^y + ye^z + ze^x = 0$ en $(0, 0, 0)$.

437 Hallar las derivadas parciales respecto de x e y de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}$$

en un entorno del punto $(0, 0, \frac{\pi}{2})$.

438 Calcula implícitamente la derivada primera de y respecto de x en el punto $(1, 1)$ si

$$\frac{\pi}{4} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \log \sqrt{2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

439 Dada la función $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$, se pide:

(a) Halla el polinomio de Taylor de grado dos en el punto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

(b) Escribir la ecuación del plano tangente al grafo de f en el mismo punto.

- Encontrar el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto indicado para los siguientes casos:

440 $f(x, y) = \frac{1}{a+x^2+y^2}$ en $(0, 0)$.

441 $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos y$, en $(0,0)$.

442 $f(x,y) = e^{x+y^2}$ en $(0,0)$.

443 $f(x,y,z) = \frac{ze^x}{\sqrt{xy}}$ en $(1,1,0)$.

444 Usando el polinomio de Taylor de primer orden en el punto adecuado, encontrar una aproximación del valor de $f(0.97, 0.05)$ para

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{1+y}\right).$$

Solución 444:

Para aproximar el valor de la función en el punto $(0.93, 0.05)$ usaremos el polinomio de Taylor de primer orden de una función en el punto $\mathbf{x}_0 = (1,0)$, que viene dado por

$$P_1(\mathbf{x};\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

Puesto que

$$f(1,0) = \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4}, \quad \nabla f(1,0) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),$$

entonces

$$P_1(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}y.$$

Evaluando $P_1(0.97, 0.05)$ obtendremos un valor aproximado al valor de $f(0.97, 0.05)$. En este caso,

$$P_1(0.97, 0.05) = \frac{\pi}{4} - 0.04 = 0.74539,$$

mientras que $f(0.97, 0.05) = 0.74581$.

445 Se considera la ecuación $y - 2z + 2 = 2z(x+y)$.

(a) Probar que se puede despejar $z = g(x,y)$ como función implícita de x e y en un entorno de $(0,0,1)$.

(b) Da un desarrollo de Taylor de orden 2 en un entorno de $(0,0)$ para la función g del apartado anterior.

Solución 445:

(a) Según el Teorema de la función implícita, dada la función

$$F(x,y,z) = y - 2z + 2 - 2z(x+y)$$

que es diferenciable con continuidad, y verifica que

$$F(0,0,1) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) \neq -2 - 2(x+y)|_{x=0,y=0,z=1} = -2 \neq 0$$

entonces se puede despejar z como función de x e y en un entorno de este punto.

(b) Para el desarrollo de Taylor de orden 2 en el origen de la función $z = g(x, y)$ necesitamos las derivadas parciales hasta orden 2 en dicho punto.

Si derivamos implícitamente la ecuación que pretende definir z en términos de x e y, respecto a x e y respectivamente, llegamos a

$$-2\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial x}(x+y) + 2z, \quad 1 - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial y}(x+y) + 2z,$$

de donde despejando $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\,z}{1+x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2z}{2(1+x+y)}.$$

En el punto $(0, 0, 1)$, dichas derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}.$$

Para las derivadas segundas es preciso seguir derivando implícitamente en las expresiones ya derivadas una vez. Así se obtiene

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-\,2\frac{\partial g}{\partial x}}{1+x+y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}}{1+x+y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{-\,2\frac{\partial g}{\partial y}}{x+y+1},$$

y particularizando en $(0, 0)$, teniendo en cuenta que ya conocemos las derivadas primeras, se obtiene

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 1.$$

De este modo el polinomio de Taylor solicitado será

$$P_2(x) = 1 - x - \frac{y}{2} + x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}y^2.$$

446 Demostrar que en un entorno de $(0, 0)$, la ecuación

$$e^{xy} + x + y^2 = 1$$

define a x como función implícita de y. Calcular $x''(0)$.

Solución 446:

Considerando la función

$$F(x, y) = e^{xy} + x + y^2 - 1$$

que es continuamente diferenciable y verifica que $F(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1 \neq 0$, el teorema de la función implícita nos garantiza la existencia de $x = x(y)$ tal que $F(x(y), y) = 0$ en un entorno de $y = 0$.

Derivando implícitamente respecto a y en la igualdad se llega a

$$e^{xy}(x'y + x) + x' + 2y = 0$$

y despejando x'

$$x' = -\frac{xe^{xy} + 2y}{1 + ye^{xy}}.$$

En el punto $(0,0)$ se calcula inmediatamente que $x'(0) = 0$. Para calcular la segunda derivada en 0, volvemos a derivar con respecto a y en la ecuación ya derivada una vez, para encontrar

$$e^{xy}\left(x'y + x\right)^2 + e^{xy}\left(x''y + 2x'\right) + x'' + 2 = 0$$

Despejando x'' llegamos a

$$x'' = -\frac{e^{xy}\left((x'y + x)^2 + 2x' + 2\right)}{1 + ye^{xy}},$$

y particularizando en $(0,0)$, teniendo en cuenta que $x'(0) = 0$, nos queda $x''(0) = -2$.

447 Demostrar que en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ la ecuación $z^3y + zx^2 = 1$ define a z como función implícita de x e y. Hallar el plano tangente a la superficie que define z en el punto $(1, 0)$.

Capítulo 3

OPTIMIZACIÓN

En este capítulo trataremos con ejercicios relacionados con el cálculo de máximos y mínimos de funciones de varias variables, una temática que entra dentro de lo que se conoce como *optimización*. En una primera parte hay ejercicios dedicados a la obtención y clasificación de puntos críticos, para luego estudiar problemas de extremos condicionados.

3.1 PUNTOS CRÍTICOS Y EXTREMOS

■ Encontrar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar su naturaleza:

448 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

449 $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$.

450 $f(x,y) = \frac{1}{x}e^{x \operatorname{sen} y}$.

451 $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

452 $f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$.

453 $f(x,y) = 6000 + 6x^3 - 36xy + 3y^2$;

454 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

455 $f(x,y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1+4y^2)}$.

456 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.

457 $f(x,y,z) = x^4 - x^2y^2 + y^4 + 4x^2 - 6y^2$.

Solución:

450 Para determinar los puntos críticos y su naturaleza para una función necesitamos resolver el sistema $\nabla f = 0$ y estudiar el carácter

de $D^2 f$, por lo que precisamos calcular explícitamente todas las derivadas hasta orden dos. Con un poco de paciencia en los cálculos obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} e^{x \operatorname{sen} y} \left(\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x \operatorname{sen} y} \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^3} e^{x \operatorname{sen} y} \left[\left(\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} \right)^2 + 1 \right],$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x \operatorname{sen} y} \cos y \operatorname{sen} y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x \operatorname{sen} y} \left(x \cos^2 y - \operatorname{sen} y \right).$$

Para resolver $\nabla f = 0$, como la exponencial no puede anularse en ningún caso, y teniendo en cuenta el excluir $x = 0$, las soluciones del sistema se obtienen para

$$\operatorname{sen} y - \frac{1}{x} = 0, \quad \cos y = 0,$$

de donde encontramos que $x = \operatorname{sen} y = 1$ o $x = \operatorname{sen} y = -1$, es decir, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$. En definitiva, tenemos los puntos críticos

$$(1, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad (-1, \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Estudiando la matriz hessiana en estas dos familias de puntos se llega a

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Estas dos matrices son no definidas, y en consecuencia, todos los puntos críticos, sin excepción, son puntos de silla. Véase un boceto del grafo en la Figura 1.

455 Al igual que en el apartado anterior calculamos todas las derivadas hasta orden dos. Así obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{1 + 4y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{3(1 + 4y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - 2x - 2}{1 + 4y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-8y(x^3 - x^2 - 2x)}{(1 + 4y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(1 - 12y^2)(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{3(1 + 4y^2)^3}.$$

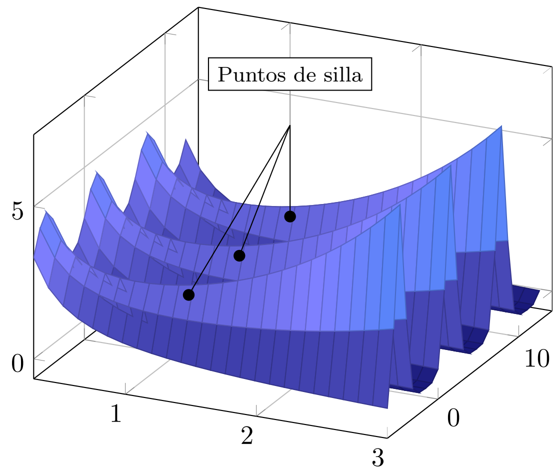


Figura 1: Función $\frac{1}{x}e^{x \operatorname{sen} y}$

Los puntos críticos se determinan encontrando las soluciones del sistema

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 12\frac{x^3 - x^2 - 2x}{1 + 4y^2},$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{3}\frac{y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)}{(1 + 4y^2)^2}.$$

Este sistema es equivalente a

$$x^3 - x^2 - 2x = 0, \quad y(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18) = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son 0, 2 y -1. Como ninguna de éstas es solución del paréntesis de la segunda, concluimos que los únicos puntos críticos son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(-1, 0)$.

Estudiamos la naturaleza de estos tres puntos críticos a través de la matriz hessiana de derivadas segundas. En concreto

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{28}{3} \end{pmatrix},$$
$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{3} \end{pmatrix}.$$

De este modo, la primera matriz es definida negativa y el punto $(0, 0)$ es un máximo (relativo), la segunda es definida positiva y el punto $(2, 0)$ es un mínimo (local), y la tercera es indefinida y el

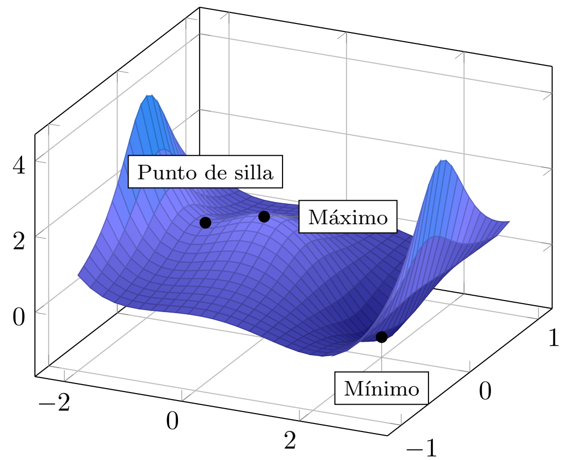


Figura 2: Función $\frac{3x^4-4x^3-12x^2+18}{12(1+4y^2)}$

punto $(-1,0)$ es un punto de silla. Véase un boceto del grafo de esta función en la Figura 2.

458 Encontrar los puntos críticos de $f(x,y)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^2y^3}{2}+\frac{y^2}{2}$ y clasificar los que no sean degenerados.

459 Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=e^{x^2}(x^4+y^4).$$

Solución 459:

Determinamos en primer lugar las derivadas parciales primeras y segundas de f. Con un poco de calma y cuidado, encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2}\left(2x^5+4x^3+2xy^4\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2}4y^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x^2}\left(4x^6+18x^4+4x^2y^4+12x^2+2y^4\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8xy^3e^{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2e^{x^2}.$$

El sistema de puntos críticos es, debido a que la exponencial jamás puede anularse,

$$2x^5+4x^3+2xy^4=0, \quad 4y^3=0.$$

Se obtiene inmediatamente como única solución el origen $(0,0)$. Ahora bien, la matriz hessiana de f en este punto es la matriz nula, de modo que se trata de un punto degenerado.

Para poder decidir en este caso la naturaleza del punto crítico en el origen, consideramos un vector director unitario

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad n_1^2 + n_2^2 = 1,$$

y la función

$$g_{\mathbf{n}}(t) = f(tn_1, tn_2) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) e^{n_1^2 t^2} t^4.$$

Se trata de decidir la naturaleza del punto crítico para $t = 0$ dependiendo del vector director $\mathbf{n}$. Para calcular las sucesivas derivadas de $g_{\mathbf{n}}(t)$ podemos valernos de la regla de Leibnitz para las derivadas de un producto[1] que en este caso afirma

$$g_{\mathbf{n}}^{(k}(t) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t^4)^{(j} \left(e^{n_1^2 t^2}\right)^{(k-j}.$$

Cuando el orden de derivación del polinomio t^4 es menor que cuatro, tales derivadas para $t = 0$ se anulan. De este modo la primera derivada no nula podría ser la cuarta, pero no ninguna anterior. Veamos la fórmula anterior para $k = 4$

$$g_{\mathbf{n}}^{(4}(t) = \left(n_1^4 + n_2^4\right) \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} (t^4)^{(j} \left(e^{n_1^2 t^2}\right)^{(4-j}.$$

Cuando evaluamos en $t = 0$, por la razón apuntada antes, todos los términos se anulan salvo, posiblemente, el correspondiente a $j = 4$ en el que en realidad obtenemos el valor 24. En consecuencia

$$g_{\mathbf{n}}^{(k}(0) = 0, \quad j \leq 3, \qquad g_{\mathbf{n}}^{(4}(0) = 24.$$

Esta conclusión es independiente del vector $\mathbf{n}$, de modo que concluimos que el origen es un mínimo para f. Véase la Figura 3

■ Determinar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

460 $f(x, y) = x^3 + y^4 - y^2$.

461 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

462 $f(x, y) = \log(2 + \operatorname{sen}(xy))$.

[1] La *regla de Leibnitz* permite calcular la derivada de orden k de un producto de funciones:

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^j f}{dx^j} \frac{d^{k-j} g}{dx^{k-j}}$$

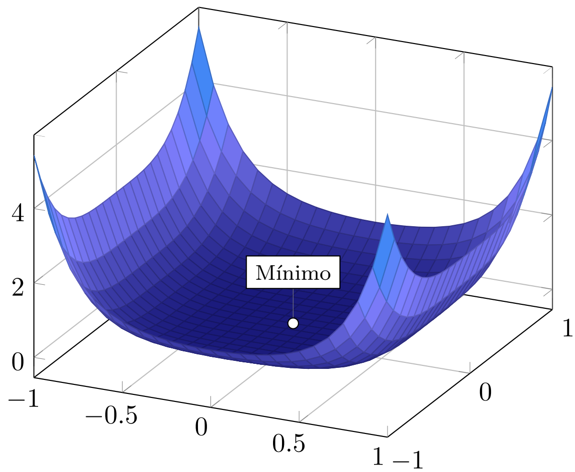


Figura 3: Función $e^{x^2}(x^4+y^4)$

463 $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$.

464 $f(x,y)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}y^3$.

465 $f(x,y)=3x^4+6x^2y-6x^2+4y^3-6y^2$.

466 $f(x,y)=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x+y)$;

467 $f(x,y)=x^3y^2(x+y-24)$;

468 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{x^2y^2}\sqrt{1+t}\,dt$.

Solución 468:

Mediante el teorema fundamental del Cálculo, podemos calcular sin dificultad las derivadas parciales de esta función f. Así

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2\sqrt{1+x^2y^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2yx^2\sqrt{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^2\sqrt{1+x^2y^2}+\frac{2x^2y^4}{\sqrt{1+x^2y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy\sqrt{1+x^2y^2}+\frac{2y^3x^3}{\sqrt{1+x^2y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2\sqrt{1+x^2y^2}+\frac{2y^2x^4}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

De este modo se obtiene inmediatamente que todos los puntos de los dos ejes coordenados son puntos críticos, para los cuales la matriz hessiana de derivadas segundas es degenerada.

Podríamos por tanto hacer un estudio más detallado en cada punto crítico mediante un vector director. Sin embargo en este caso es muy sencillo razonar que todos los puntos críticos encontrados son en realidad puntos de mínimo. En efecto, obsérvese que el límite superior de la integral que define f es x^2y^2 que es siempre no negativo. Como además el integrando $\sqrt{1+t}$ es positivo, resulta que el mínimo (en realidad global) de f ocurre cuando $x^2y^2 = 0$, es decir en los puntos críticos. Véase la Figura 4.

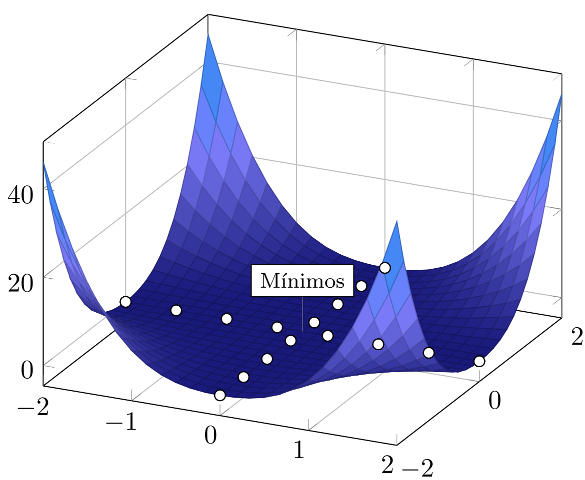


Figura 4: Función del Ejercicio 468

■ Encuentra los extremos de las funciones que se dan a continuación:

469 $f(x,y) = \displaystyle\int_{x+y}^{x-y} \frac{1}{1+t^6}\,dt.$

470 $f(x,y) = \displaystyle\int_{0}^{xy} (1-s^2)^{3/2}\,ds.$

Solución 470:

Las derivadas parciales de f se encuentran sin grandes dificultades a través del teorema fundamental del Cálculo y un poco de cuidado en los

cálculos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left(1 - x^2y^2\right)^{3/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\left(1 - x^2y^2\right)^{3/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3xy^3\left(1 - x^2y^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(1 - x^2y^2\right)^{3/2} - 3yx^2\left(1 - x^2y^2\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3yx^3\left(1 - x^2y^2\right)^{1/2}.$$

El sistema de puntos críticos es

$$y\left(1 - x^2y^2\right)^{3/2} = 0, \quad x\left(1 - x^2y^2\right)^{3/2} = 0.$$

Las posibles soluciones son el origen $(0,0)$ y los puntos tales que $x^2y^2 = 1$. Nótese que el dominio de f es precisamente el conjunto de puntos (x,y) tales que $x^2y^2 \leq 1$, pues en otro caso el integrando no está definido. La matriz hessiana de f en $(0,0)$ se encuentra rápidamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es no definida, de modo que el origen es un punto de silla. Con respecto a la otra posibilidad vislumbramos dos casos según si $xy = 1$ o $xy = -1$. En la primera situación observamos que el límite superior de integración en la definición de f es máximo y como el integrando es no negativo, la función f alcanzará en tales puntos su máximo. Por la misma razón, cuando $xy = -1$ tendremos puntos de mínimo.

471 Dados los puntos $(1,-1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$, encontrar el punto que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias a estos cuatro puntos.

472 ¿Para qué valores de k la función $f(x,y) = kx^2 + 5xy + 4y^2$ tiene un mínimo relativo en $(0,0)$?

473 Una empresa estima que la inversión en publicidad genera unos beneficios dados por $x^3y^5z^6$, donde x es el dinero invertido en publicidad escrita, y en publicidad radiofónica y z en publicidad televisiva. Encontrar la relación entre x, y y z que maximiza los beneficios netos (i.e. la diferencia entre beneficios obtenidos y gastos realizados).

474 (*Método de los mínimos cuadrados*) Dado un conjunto de pares de datos $\{(x_i, y_i)\}_{1\leq i\leq n}$, se trata de determinar la función lineal $y = a + bx$ que mejor se ajusta a estos datos. El criterio para determinar a y b consiste en minimizar la suma del cuadrado de los errores, es decir, buscamos el mínimo de la función

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2.$$

Probar que el mínimo se obtiene para

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

3 2

EXTREMOS CONDICIONADOS

■ Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

475 $f(x,y,z) = x - y + z, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

476 $f(x,y) = 3x + 2y, \qquad 2x^2 + 3y^2 = 3.$

477 $f(x,y) = xe^{xy}, \qquad x^2 + y = 0.$

478 $f(x,y) = x^y, \qquad x > 0,\ y > 0,\ xy = 1.$

479 $f(x,y,z) = x^2 + 2yz, \qquad x^2 + y^2 = z^2.$

480 $f(x,y,z) = xyz, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$

Solución:

476 Observemos en primer lugar que la restricción $2x^2 + 3y^2 = 3$ representa una elipse en el plano, centrada en el origen, que es un conjunto compacto (cerrado y acotado). En consecuencia, el Teorema de Weierstrass asegura que el máximo y el mínimo de cualquier función continua debe alcanzarse en dicha elipse. Por otra parte, el Teorema de los multiplicadores de Lagrange asegura que los extremos restringidos están entre los puntos del conjunto que satisfacen $\nabla f + \sum_i \lambda_i \nabla g_i = 0$, donde f es la función objetivo y g_i las restricciones de igualdad. Así, mediante un multiplicador λ (obsérvese que hay sólo una restricción) las ecuaciones que nos permiten determinar tales puntos extremos son

$$3 + 4\lambda x = 0, \quad 2 + 6\lambda y = 0.$$

junto con la restricción dada. En particular λ no puede anularse y, en este caso,

$$x = -\frac{3}{4\lambda}, \quad y = -\frac{1}{3\lambda}.$$

Llevando estas expresiones a la restricción, y después de simplificar, encontramos los dos valores posibles para el multiplicador

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{70}}{12}.$$

En consecuencia el máximo se alcanza en

$$\left(\frac{9\sqrt{70}}{70}, \frac{2\sqrt{70}}{35}\right)$$

y el mínimo en

$$\left(-\frac{9\sqrt{70}}{70}, -\frac{2\sqrt{70}}{35}\right).$$

477 En este caso, la restricción que debe respetarse permite despejar "limpiamente" y en función de x, de modo que llevando $y = -x^2$ a la función f obtenemos la función de una sola variable

$$g(x) = xe^{-x^3}.$$

Encontraremos por tanto los extremos de esta función, y los extremos para f corresponderán a los puntos $(x, -x^2)$ siendo x un punto extremo para g. La ecuación para los puntos críticos de g es

$$e^{-x^3}(1 - 3x^3) = 0,$$

que tiene como única solución $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Además se debe tratar de un máximo pues g es una función continua que verifica que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty,$$

pero $g(x) > 0$ si $x > 0$. El mínimo no se alcanza $(-\infty)$. En consecuencia el punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$$

es un punto de máximo para f sujeto a la restricción $y + x^2 = 0$, y el mínimo al ser $-\infty$ no se alcanza. Nótese que la restricción es una parábola que es una curva no acotada.

480 Obsérvese en primer lugar que completando cuadrados en la ecuación que expresa la restricción se obtiene

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1,$$

de modo que se trata de la esfera de radio 1 centrada en el punto $(1, -1, 0)$. Es por tanto una región limitada y la función continua $f(x, y, z) = xyz$ alcanza sus dos valores extremos, máximo y mínimo, en dicha región.

Introduciendo un multiplicador λ asociado a la restricción de igualdad que debemos respetar, las ecuaciones que debemos resolver para detectar dichos valores extremos son

$$yz + \lambda 2(x-1) = 0, \quad xz + \lambda 2(y+1) = 0, \quad xy + \lambda 2z = 0,$$

junto con la propia ecuación que expresa la restricción. Si multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, concluimos que

$$xyz = -2\lambda x(x-1) = -2\lambda y(y+1) = -2\lambda z^2.$$

Por lo tanto

$$\lambda\left(x^2 - x - y^2 - y\right) = 0, \quad \lambda\left(x^2 - x - z^2\right) = 0.$$

La primera ecuación puede factorizarse como

$$\lambda(x+y)(x-y-1) = 0,$$

lo que nos conduce a las tres posibilidades siguientes:

(I) $\lambda = 0$. En este caso dos de las variables deben anularse. El caso $x = y = 0$ es imposible por la restricción, pero los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$ si son admisibles. Estos dos son por tanto soluciones.

(II) $y = x - 1$, $z^2 = x^2 - x$. Llevando estas expresiones a la restricción llegamos a

$$3(x^2 - x) = 0$$

lo que supone $x = 0$ o $x = 1$. En cualquier caso $z = 0$, y volvemos a obtener los dos puntos anteriores.

(III) $y = -x$, $z^2 = x^2 - x$. Procediendo del mismo modo encontramos

$$3x^2 - 5x + 1 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Como $x^2 - x = z^2$ y en particular la expresión $x^2 - x$ debe ser no negativa, esta condición excluye el signo negativo delante de la raíz. Las dos posibilidades que obtenemos son

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}, -\frac{5+\sqrt{13}}{6}, \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{9}}\right).$$

De estas dos posibilidades el signo negativo para z corresponde al punto de máximo con valor

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{9}},$$

y el signo positivo corresponde al punto de mínimo con el mismo valor anterior cambiado de signo.

481 Diseñar una lata cilíndrica con una tapa para contener un litro de agua, usando la mínima cantidad de metal.

482 Hallar el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular contenido en el primer octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ con un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano $x + y + z = 1$.

483 Hallar la distancia mínima entre el punto $(0, 1)$ y la parábola $x^2 = 4y$.

484 Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x - 1$.

485 Hallar los extremos de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujetos a las restricciones $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

Solución 485:

En este caso tenemos dos restricciones que respetar y por tanto debemos introducir dos multiplicadores λ y μ. De este modo el sistema que debemos resolver es

$$1 + 2\lambda x + 2\mu = 0, \quad 1 - 2\lambda y = 0, \quad 1 + \mu = 0,$$

junto con las dos restricciones. Inmediatamente obtenemos $\mu = -1$ y por tanto

$$2\lambda x = 1, \quad 2\lambda y = 1,$$

de donde concluimos que $x = y$. Pero nótese que entonces la primera restricción $x^2 - y^2 = 1$ es imposible de cumplir. Esto significa que el sistema que debemos resolver no admite ninguna solución, y en particular, esto supone que la región del espacio determinada por las dos restricciones no puede ser acotada de modo que los valores de la función f crecen indefinidamente hacia $+\infty$ sobre puntos admisibles y decrecen hacia $-\infty$. En efecto, si tomamos $y \sim -x$ pero respetando $x^2 - y^2 = 1$ (lo cual supone $x^2 \to \infty$) y $z = 1 - 2x$, la función f vale, aproximadamente, $1 - 2x$, de modo que si $x \to \pm\infty$ vemos que los valores de f crecen o decrecen indefinidamente. Véase la siguiente Figura 5 representando a la región factible.

486 Encontrar el punto más cercano al origen de entre todos los de la superficie de ecuación $z = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + y^2 - 1$. (Indicación: en vez de la distancia al origen, es más conveniente minimizar la distancia al cuadrado).

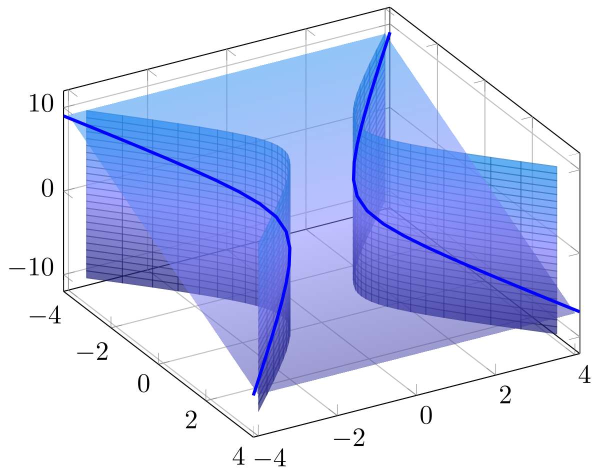


Figura 5: Región factible en el Ejercicio 485

487 Encontrar los puntos de la superficie $xyz = 1$ más próximos al origen.

488 Encontrar los puntos más lejanos al origen de entre todos los que satisfacen la condición $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ (Indicación: esta ecuación representa una superficie acotada).

489 Hallar la mínima distancia del origen a la superficie $x^2 + y^2 + z = 3$.

490 Encontrar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = x+2y+3z$ sometida a la restricción $xy + xz + yz = 1$.

Solución 490:

Las ecuaciones que debemos resolver son

$$1 + \lambda(y + z) = 0, \quad 2 + \lambda(x + z) = 0, \quad 3 + \lambda(x + y) = 0,$$

junto con la restricción

$$xy + xz + yz = 1.$$

Restando la primera de la segunda se llega a

$$1 + \lambda(x - y) = 0,$$

que junto con la tercera conduce a

$$2 + \lambda x = 0, \quad 1 + \lambda y = 0,$$

de donde concluimos que x e y no pueden anularse, y además $2y = x$. Además llevando esta información a las dos primeras ecuaciones deducimos que $z = 0$. Finalmente para la restricción obtenemos

$$2y^2 = 1, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm\sqrt{2}, \quad z = 0.$$

Las posibles soluciones son por tanto

$$\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Sin embargo ninguna de estas soluciones corresponde a los valores extremos. Para convencernos de esto basta con tomar $z = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, que son puntos que satisfacen la restricción. Sobre estos puntos el valor de f es $x + \frac{2}{x}$. Cuando x es positivo pero próximo a cero, esta última expresión tiene un valor positivo muy grande, mientras que si x es próximo a cero pero negativo tiene un valor muy grande pero negativo. Esto significa que el valor máximo es $+\infty$ (sin límite) y el mínimo $-\infty$ y los valores extremos no se alcanzan. Nótese que la superficie no está acotada.

491 Sabiendo que la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ representa una superficie limitada en $\mathbb{R}^3$, encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^4y + z^4$ sobre dicha superficie.

492 Dada la función $F(x) = x(x^2 - 1)$, considera la función de tres variables $f(t, x, y) = tF(x) + (1 - t)F(y)$. Encuentra los puntos críticos de f bajo la restricción $tx + (1 - t)y = a$ donde a es un número dado fijo.

Solución 492:

De forma explícita, la función f es

$$f(t, x, y) = t(x^3 - x) + (1 - t)(y^3 - y),$$

de modo que el sistema a resolver se escribe

$$\begin{aligned} (x^3 - x) - (y^3 - y) + \lambda(x - y) &= 0, \\ t(3x^2 - 1) + \lambda t &= 0, \\ (1 - t)(3y^2 - 1) + \lambda(1 - t) &= 0, \\ tx + (1 - t)y &= a. \end{aligned}$$

Si factorizamos en las tres primeras ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda) &= 0, \\ t(3x^2 - 1 + \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-t)(3y^2-1+\lambda) =&0,\\ tx+(1-t)y =&a.\end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones tienen forma de producto que debe anularse, de modo que podemos organizar todas las posibles soluciones examinando los $2^3 = 8$ casos posibles según se anulen en cada ecuación uno u otro paréntesis.

(I) $x = y$, $t = 0$, $1 - t = 0$: este caso es obviamente imposible;

(II) $x = y$, $t = 0$, $3y^2 - 1 + \lambda = 0$: la restricción impone $x = y = a$, y este es un posible punto crítico;

(III) $x = y$, $3x^2 - 1 + \lambda = 0$, $t = 1$: este caso es análogo al anterior pues se obtiene el punto $x = y = a$, $t = 1$;

(IV) $x = y$, $3x^2 - 1 + \lambda = 0$ pero t distinto de 0 y 1: la solución en este caso es $x = y = a$, y cualquier valor de t, en particular, los dos casos anteriores están incluidos en éste;

(V) $x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda = 0$, $t = 0$, $1 - t = 0$: este caso es también imposible;

(VI) $x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda = 0$, $t = 0$, $3y^2 - 1 + \lambda = 0$: de la restricción se obtiene $y = a$ y en consecuencia el valor de x debe ser tal que

$$x^2 + ax - 2a^2 = 0,$$

luego $x = a$ ó $x = -2a$, y los dos puntos críticos son $t = 0$, $y = a$, $x = a$ ó $x = -2a$;

(VII) $x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda = 0$, $3x^2 - 1 + \lambda = 0$, $t = 1$: este caso es análogo al anterior intercambiando los papeles de x e y, por tanto se obtienen los puntos $t = 1$, $x = a$, $y = a$ o $y = -2a$;

(VIII) $x^2 + xy + y^2 - 1 + \lambda = 0$, $3x^2 - 1 + \lambda = 0$, $3y^2 - 1 + \lambda = 0$: estas tres ecuaciones suponen

$$x^2 = y^2, \quad 3x^2 = x^2 + xy + y^2,$$

por tanto $x^2 = xy$. Así deducimos que $x = y$ y volvemos a obtener los puntos críticos anteriores. Si a es cero, la posibilidad $x = 0$ sería también posible, pero incluso este caso estaría incluido en los casos anteriores.

En resumidas cuentas, los puntos críticos son

$$(t, a, a), \quad (0, -2a, a), \quad (1, a, -2a),$$

para cualquier valor de t.

493 Encontrar las dimensiones de una caja de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 1.

494 Dados los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(1, 1, -2)$ determinar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 = z + \frac{5}{2}$ que forman con A y B:

(a) un triángulo de área mínima;

(b) un triángulo de área máxima.

(Indicación: el área de un triángulo de vértices A, B, C viene dada por $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. El óptimo no cambia si en lugar de usar la función $\|\cdot\|$ se considera la función $2\|\cdot\|^2$.)

Solución 494:

Si C designa un punto genérico (x, y, z) de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = z + \frac{5}{2}$, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son, respectivamente,

$$(0, 1, 0), \quad (x - 1, y, z + 2);$$

en consecuencia $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|^2$ será $(x - 1)^2 + (z + 2)^2$. Por tanto, nos interesa encontrar los valores máximo y mínimo de la función

$$\frac{1}{2}\left[(x - 1)^2 + (z + 2)^2\right]$$

bajo la restricción

$$x^2 + y^2 = z + \tfrac{5}{2}.$$

Nótese en primer lugar que tomando x todo lo grande que deseemos, $y = 0$ y $z = x^2 - \frac{5}{2}$ el valor de la función anterior en estos puntos será también todo lo grande que queramos, lo cual significa que en realidad podemos hacer el área de un tal triángulo todo lo grande que deseemos: no existe el máximo. Por otro lado el área de un triángulo no puede ser negativa, es decir, está acotada, y como cuando cualquier coordenada del punto C tiende a infinito el área del triángulo también se hace indefinidamente grande, concluimos que sí existe un triángulo de área mínima que se encuentra como solución a las ecuaciones de los puntos críticos.

Para encontrar el triángulo de área mínima, debemos plantear el sistema de puntos críticos, que es

$$\begin{aligned} x - 1 + \lambda 2x &= 0, \\ \lambda 2y &= 0, \\ z + 2 - \lambda &= 0, \\ x^2 + y^2 &= z + \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

La segunda ecuación nos permite distinguir los dos casos $\lambda = 0$, $y = 0$. El primero conduce a $x = 1$, $z = -2$, y de aquí la ecuación de la superficie

impone $y^2 = -\frac{1}{2}$ que es lógicamente imposible. La segunda posibilidad $y = 0$ lleva a

$$x = \frac{1}{1 + 2\lambda}, \quad z = \lambda - 2,$$

y llevando estas expresiones a la ecuación de la superficie encontramos

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4},$$

de donde

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}},$$

y

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Esta única solución corresponde al triángulo de área mínima.

495 Encontrar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que pasa por el punto $(1, 4)$ y tiene área máxima. (Ayuda: el área de la elipse es πab, con $a, b > 0$).

496 Encuentra el valor máximo que puede tomar la función $g(x, y, z) = xyz$ bajo las restricciones $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Concluir que si $a, b, c \geq 0$ entonces

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Solución 496:

Es bastante claro que la función $g(x, y, z) = xyz$ no puede crecer indefinidamente si las variables x, y, z están limitadas de modo que $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Dicho valor máximo podemos determinarlo resolviendo el sistema de puntos críticos

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0, \\ xz + \lambda &= 0, \\ xy + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, concluimos inmediatamente que $\lambda x = \lambda y = \lambda z$, y como λ no puede anularse (en cuyo caso $xyz = 0$ correspondería al mínimo, no al máximo que debe ser estrictamente positivo) debemos tener $x = y = z$, y debido a la restricción, $x = y = z = \frac{1}{3}$ es el punto de máximo.

Sean ahora a, b, c tres números no negativos cualesquiera dados. Consideremos cualquier punto (x', y', z') tal que

$$x' + y' + z' = a + b + c, \quad x', y', z' \geq 0.$$

El punto (x, y, z) con

$$x = \frac{x'}{a+b+c}, \quad y = \frac{y'}{a+b+c}, z = \frac{z'}{a+b+c}$$

es tal que

$$x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0.$$

Por la primera parte del problema $xyz \leq \frac{1}{27}$, es decir,

$$x'y'z' \leq \frac{(a+b+c)^3}{27},$$

cualesquiera que sean x', y', z' en las condiciones anteriores; en particular para $x' = a$, $y' = b$, $z' = c$ tendremos

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27},$$

de lo que se deduce la conclusión deseada.

497 Hallar, de entre todos los números a y b que verifican la relación $(a-2)^2 + (b-2)^2 = 1$, aquéllos que hagan menor el máximo de la función $f(x) = xe^{-x/(a+b)}$ en $[0, +\infty)$.

498 Encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Solución 498:

Puesto que tratamos de localizar los extremos absolutos de la función f sobre una región cerrada y acotada, bastará con encontrar los puntos críticos que den el mayor y menor valor para f. Introduciendo el multiplicador oportuno, los puntos críticos resuelven el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 - 2\lambda x & = & 0 \\ 3y^2 - 2\lambda y & = & 0 \\ 3z^2 - 2\lambda z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 4 \end{array} \iff \begin{array}{crcl} (1) & x(3x - 2\lambda) & = & 0 \\ (2) & y(3y - 2\lambda) & = & 0 \\ (3) & z(3z - 2\lambda) & = & 0 \\ (4) & x^2 + +y^2 + z^2 & = & 4 \end{array}$$

Casos:

(I) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. No se verifica (4).

(II) $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$. De (3) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}z$. De (4) se llega a $z^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_1 = (0,0,2)$ y $P_2 = (0,0,-2)$.

(III) $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$. De (2) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}y$. De (4) se llega a $y^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_3 = (0,2,0)$ y $P_4 = (0,-2,0)$.

(IV) $x \neq 0$, $y = 0$, $z = 0$. De (1) se deduce $\lambda = \frac{3}{2}x$. De (4) se llega a $x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_5 = (2,0,0)$ y $P_6 = (-2,0,0)$.

(V) $x = 0, y \neq 0, z \neq 0$. De (2) y (3) se deduce $y = z$. De (4) se llega a $2y^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_7 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $P_8 = (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(VI) $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$. De (1) y (3) se deduce $x = z$. De (4) se llega a $2x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_9 = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ y $P_{10} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

(VII) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$. De (1) y (2) se deduce $x = y$. De (4) se llega a $2x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_{11} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ y $P_{12} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

(VIII) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. De (1), (2) y (3) se deduce $x = y = z$. De (4) se llega a $3x^2 = 4$. Luego salen los puntos $P_{13} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ y $P_{14} = (-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

El menor valor de f se da en los puntos P_2, P_4 y P_6 y el mayor se halla en P_1, P_3 y P_5.

499 Sean $a_1, \ldots, a_n$, n números positivos dados. Encontrar $x_1, \ldots, x_n$ tales que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ y hagan máximo $\sum_{i=1}^n a_i x_i$.

500 Una empresa dedicada a la producción de motores eléctricos estima que el coste diario de producción de x unidades del motor I e y unidades del motor II viene dado por la función $2x^2 + y^2 - xy$. ¿Cuántos motores de cada tipo debe producir para minimizar el coste, si diariamente debe producir un total de 96 motores?

501 El material con el que se fabrica la base de una caja rectangular abierta cuesta a razón de $3€/\mathrm{m}^2$. El material para fabricar los laterales cuesta $1€/\mathrm{m}^2$. Encuentra las dimensiones de la caja:

(a) de mayor volumen que puede fabricarse con $36€$;

(b) de menor precio que tenga un volumen superior a $1\mathrm{m}^3$.

Solución 501:

El volumen de una tal caja es $V(x, y, z) = xyz$ mientras que el coste de la misma será $C(x, y, z) = 3xy + 2xz + 2yz$. Evidentemente debemos siempre exigir $x, y, z \geq 0$.

(a) Se trata de maximizar V bajo $C \leq 36$. Debemos distinguir dos situaciones: los puntos críticos de V (sin restricciones) que verifiquen

la restricción del coste, y los puntos críticos de V bajo la restricción $C = 36$. El primer caso no conduce a ninguna solución lógica, por tanto esperamos conseguir la caja solicitada estudiando la segunda situación:

$$\begin{aligned} yz + \lambda(3y + 2z) =&0, \\ xz + \lambda(3x + 2z) =&0, \\ xy + \lambda(2y + 2x) =&0, \\ 3xy + 2xz + 2yz =&36. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z, llegamos a la conclusión (después de descartar la posibilidad de que $\lambda = 0$)

$$3xy + 2xz = 3xy + 2yz = 2yz + 2xz.$$

Además, como el máximo buscado no puede corresponder a ninguna dimensión nula, de las igualdades anteriores deducimos que $x = y = \frac{2z}{3}$. Llevando estas expresiones a la restricción del coste, encontramos que

$$x = y = 2, \quad z = 3,$$

son las dimensiones de la caja solicitada.

(b) En este caso nos interesa minimizar C bajo $V \geq 1$, y de la misma manera debemos distinguir dos posibilidades: o bien la solución es un punto crítico de C sin restricciones pero que verifica la restricción; o bien se trata de un punto crítico de C bajo la condición $V = 1$. La primera posibilidad conduce al sistema

$$\begin{aligned} 3y + 2z =&0, \\ 3x + 2z =&0, \\ 2y + 2z =&0, \end{aligned}$$

cuya única solución es la trivial $(0, 0, 0)$ que no tiene significado físico. Por tanto la solución solicitada debe encontrarse en la segunda posibilidad. En este caso debemos resolver

$$\begin{aligned} 3y + 2z + \lambda yz =&0, \\ 3x + 2z + \lambda xz =&0, \\ 2y + 2z + \lambda xy =&0, \\ xyz =&1. \end{aligned}$$

Multiplicando por x la primera ecuación, por y la segunda y por z la tercera, deducimos que

$$3xy + 2xz = 3xy + 2yz = 2yz + 2xz,$$

y como en el caso anterior $x = y = \frac{2z}{3}$. La restricción del volumen nos permite determinar que la solución óptima pedida corresponde a

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$$

502 Encontrar el valor mínimo de la función $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en la intersección de los planos $x + 2y = 3$ y $2y + 3z = 2$.

503 Encontrar el punto de la intersección entre el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $x + 2y = 1$ más cercano al origen.

504 Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + axy + \frac{y^4}{4}$$

donde $0 < a < 1$ es una constante. Determinar el valor máximo y mínimo de f en el cuadrado $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ para $a = 1/2^{30}$.

505 Hallar los valores extremos de la función $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 - x^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución 505:

Como de costumbre, existen dos posibilidades que debemos tener en cuenta: buscar los puntos críticos de f sin restricciones que verifican la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$, y los puntos críticos de f bajo la restricción $x^2 + y^2 = 1$. La primera conduce al sistema

$$\begin{aligned} 2x(4x^2 - 3y^2 - 1) &= 0, \\ 2y(-3x^2 + 4y^2) &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones, después de examinar las cuatro posibilidades que surgen según qué factor en cada ecuación se anula, son

$$(0, 0), \quad \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

(todas las combinaciones de signos son válidas). La segunda posibilidad conduce al sistema

$$\begin{aligned} 2x(4x^2 - 3y^2 - 1 + \lambda) &= 0, \\ 2y(-3x^2 + 4y^2 + \lambda) &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

De nuevo estudiando las cuatro posibilidades que surgen, llegamos a los puntos (sin repetir aquellos comunes con la posibilidad anterior)

$$(0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0).$$

Finalmente, debemos evaluar la función f en todos estos candidatos y decidir el valor máximo y mínimo: el máximo es 2 y se alcanza en los puntos $(0, \pm 1)$ y el mínimo es $-\frac{2}{7}$ y se alcanza en los cuatro puntos

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}\right).$$

506 Determinar los extremos de la función $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ sobre la región determinada por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq x + 1$.

507 Encontrar al valor máximo de $f(x, y) = xy$ para todos los puntos del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

508 Considera la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ y el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 1\}$. Calcula los valores máximo y mínimo de f en M, procediendo en dos pasos:

(a) Calcula los extremos de f bajo la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que satisfacen además la condición $z \leq 1$.

(b) Encuentra los extremos de f bajo las dos restricciones $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z = 1$, y compara los valores obtenidos con los del apartado anterior para concluir.

509 Se considera la función $f(x, y) = x^2y^2 - 3xy - 4$. Se pide:

(a) Obtener y clasificar los puntos críticos de f.

(b) Hallar los puntos críticos de f en el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y clasificarlos.

(c) Determinar un polinomio $P(x, y)$, de grado menor o igual que dos, de forma que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0.$$

Solución 509:

(a) Planteamos el sistema de puntos críticos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2y - 3x = 0, \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} y(2xy - 3) &= 0, \\ x(2xy - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Si $y = 0$ en la primera ecuación, entonces en la segunda ecuación $x = 0$. Se obtiene el punto $P = (0, 0)$.
Si $2xy = 3$, se resuelven ambas ecuaciones, luego el conjunto de puntos $xy = \frac{3}{2}$ es solución del sistema.
Para clasificar los puntos críticos que nos han salido estudiamos la matriz hessiana de f:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy - 3 \\ 4xy - 3 & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es -9, y por tanto corresponde a una forma cuadrática indefinida. Es decir $(0, 0)$ es un punto de silla.
Por otra parte, en los puntos de la curva $xy = \frac{3}{2}$, H_f tiene determinante 0, por lo que el criterio de la derivada segunda no decide. No obstante podemos observar que

$$f(x, y) = x^2y^2 - 3xy - 4 = (xy - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} - 4 = (xy - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{25}{4}.$$

Luego $f(x, y) \geq -\frac{25}{4}$. Teniendo en cuenta que el valor de f en los puntos $xy = \frac{3}{2}$ es justamente $-\frac{25}{4}$, deducimos que en todos los puntos de esa curva f alcanza un mínimo.

(b) Resolvemos usando multiplicadores de Lagrange. El sistema de puntos críticos para esta función es

$$\left.\begin{array}{c} 2xy^2 - 3y - 2\lambda x = 0 \\ 2x^2y - 3x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{cc} 2x(y^2 - \lambda) = 3y & (1) \\ 2y(x^2 - \lambda) = 3x & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{array}$$

De (1) y (2), si $x, y \neq 0$ se tiene $\frac{x}{y}(y^2 - \lambda) = \frac{y}{x}(x^2 - \lambda)$, y si $\lambda \neq 0$ resulta que $x^2 = y^2$.
Entonces, si $x = y$, en (3) se tiene que $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Salen los puntos

$$P_1 = (\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}), \qquad P_2 = (-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Por el contrario, si $x = -y$ entonces los puntos son

$$P_3 = (\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}), \qquad P_4 = (-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Por otra parte, si $x = 0$, $y = 0$ ó $\lambda = 0$, el sistema no posee solución.

Puesto que el conjunto $\{x^2 + y^2 = 1\}$ es un compacto en $\mathbb{R}^2$, entonces la función alcanzará máximo y mínimo absolutos en él. Evaluando la función en los puntos obtenidos se tiene que P_1, P_2 son máximos, y P_3, P_4 mínimos.

(c) El polinomio que buscamos es precisamente el polinomio de Taylor de grado dos de f en el punto $(1,1)$, que además es el único que satisface la condición requerida. Teniendo en cuenta los cálculos para las derivadas primera y segunda que hemos realizado en el apartado primero, se obtiene

$$f_x(1,1) = -1, \quad f_y(1,1) = -1,$$
$$f_{xx}(1,1) = 2, \quad f_{yy}(1,1) = 2 \quad f_{xy}(1,1) = 1.$$

Por tanto
$$P(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 4x - 4y - 1.$$

510 Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, hallar los puntos críticos de f en el conjunto

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\},$$

y clasificarlos.

Solución 510:

Tenemos dos posibilidades que explorar: o bien buscamos los puntos críticos de f sin restricciones que además pertenezcan a E; o bien los extremos se encuentran entre los puntos críticos de f bajo la restricción de igualdad. Estas dos posibilidades corresponden a los sistemas

$$2x = 2y = -1 = 0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1,$$

y

$$2x + \lambda\frac{x}{2} = 0, \quad 2y + \lambda\frac{y}{2} = 0,$$
$$-1 + \lambda\frac{2z}{9} = 0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,$$

respectivamente. Evidentemente, la primera posibilidad es incompatible de suerte que no aporta ningún candidato. Para la segunda, y tras factorizar x e y en la primera y segunda ecuación respectivamente, llegamos a las dos posibilidades:

(I) $x = y = 0$: en este caso de la restricción de igualdad obtenemos $z = \pm 3$;

(II) $\lambda = -4$: de la tercera ecuación encontramos $z = -\frac{9}{8}$, y de la restricción

$$x^2 + y^2 = \tfrac{55}{16}.$$

Todos estos puntos son críticos.

Examinamos a continuación los valores de la función f en todos estos candidatos para encontrar

$$f(0,0,3) = -3, \quad f(0,0,-3) = 3,$$

y

$$f(x,y,-\tfrac{9}{8}) = \tfrac{73}{16} \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = \tfrac{55}{16}.$$

Por tanto el mínimo se encuentra en $(0,0,3)$ y el máximo se alcanza en todos los puntos de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = \tfrac{55}{16}, \quad z = -\tfrac{9}{8}.$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

Capítulo **4**

Los ejercicios de este tema están dedicados al cálculo integral de funciones de varias variables, centrándonos en el estudio de integrales dobles y triples. La dificultad real de los ejercicios expuestos aquí estriba fundamentalmente en la correcta descripción de las regiones de integración, tanto en el plano, como en el espacio. Para ayudarnos en esta tarea hemos tratado de representar gráficamente la mayoría de los ejercicios resueltos de manera que el lector pueda visualizar las descripciones. No obstante, la labor de realizar bocetos de regiones en el plano y el espacio no es tarea sencilla y necesita de una buena dosis de experiencia, por lo que recomendamos efusivamente que el lector trate de dibujar por sí mismo las gráficas mostradas. En la última sección proponemos resolver las integrales mediante cambios de variables, prestando especial atención al uso de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

4 1 INTEGRALES DOBLES

■ Calcular las integrales siguientes:

511 $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (x+y)\,dx\,dy.$

512 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta.$

513 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 ye^x\,dy\,dx.$

514 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^3 y^5e^{xy^3}\,dx\,dy.$

515 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^e \frac{\operatorname{sen} y}{x}\,dx\,dy.$

516 $\displaystyle\int_{[0,1]^2}(ax+by+c)\,dA.$

Solución:

515 La integración interior respecto a x tratando a la variable y como si fuera una constante nos da

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} y}{x}\,dx = \operatorname{sen} y \log x\Big|_1^e = \operatorname{sen} y,$$

y, ahora la integración respecto a y proporciona el valor de la integral doble solicitada

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y\, dy = -\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

516 Como la región es $[0,1]\times[0,1]$, la integral que nos piden será

$$\int_0^1\int_0^1 (ax+by+c)\, dx\, dy.$$

Integrando en primer lugar respecto a x, obtenemos

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{2}+by+c\right) dy.$$

Y esta integración respecto a y arroja el valor

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c,$$

que es el valor de la integral solicitada.

517 Probar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 x^n y^n\, dx\, dy = 0.$$

Solución 517:

La integración iterada proporciona

$$\int_0^1\int_0^1 x^n y^n\, dx\, dy = \int_0^1 y^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\, dy$$
$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 y^n\, dy = \frac{1}{n+1}\,\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2};$$

Tomando límite se obtiene el resultado esperado.

■ Calcular las siguientes integrales dobles:

518 $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx.$

519 $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\, dy\, dx.$

520 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy\,dx.$

521 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos x} y \operatorname{sen} x\,dy\,dx.$

522 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} x(1+y)\,dy\,dx.$

523 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{\frac{-3\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}} \left(\frac{5}{\sqrt{2+x}}+y^3\right)dy\,dx.$

524 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^3} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx.$

525 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^4}^{x}(y-x)\,dy\,dx.$

Solución:

520 La integral interior es

$$\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy = e^{x+y}\Big|_{-2|x|}^{|x|} = e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}.$$

La segunda integral iterada es ahora

$$\int_{-1}^{1}\left(e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}\right)\,dx.$$

Para calcular esta integral debemos desglosarla en dos integrales para poder tratar el valor absoluto. Si llamamos I a la integral solicitada entonces

$$I=\int_{-1}^{0}\left(e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}\right)\,dx+\int_{0}^{1}\left(e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}\right)\,dx.$$

Ahora bien, en la primera integral $|x|=-x$ pues x es negativo, y en consecuencia

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\left(e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}\right)\,dx &= \int_{-1}^{0}\left(1-e^{3x}\right)\,dx\\ &= 1-\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3}.\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando x es positivo $|x|=x$, y así

$$\int_{0}^{1}\left(e^{x+|x|}-e^{x-2|x|}\right)\,dx=\int_{0}^{1}\left(e^{2x}-e^{-x}\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}.$$

El resultado final será la suma de los dos resultados parciales obtenidos:

$$I = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{e} + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}.$$

523 La integración interior respecto a y da el siguiente resultado

$$\int_0^2 \left(y\frac{5}{\sqrt{2+x}} + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{\frac{-3\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{4-x^2}}{2}} dx$$

$$= \frac{15\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2+x}} = 15\sqrt{2-x}$$

La segunda integración iterada nos da finalmente,

$$\int_0^2 15\sqrt{2-x}\,dx = -10(2-x)^{3/2}\Big|_0^2 = 20\sqrt{2}.$$

■ Calcular las integrales:

526 $\int_D x^3 y\,dA$, con D la región entre el eje Y y la parábola $x = -4y^2+3$.

527 $\int_D (1+xy)\,dA$, con D la región definida por $1 \le x^2+y^2 \le 2$ e $y \ge 0$.

528 $\int_D y\,dA$, con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \frac{2x}{\pi} \le y,\ y \le \operatorname{sen} x\right\}$.

529 $\int_D 2y\,dA$, con D la región $y \ge x^2$ interior al círculo $x^2+y^2 = 2$.

530 $\int_D dA$, con D la región entre $y = |x|$ e $y = \frac{2}{1+x^2}$.

Solución:

526 Para obtener los límites de integración comenzamos dibujando la región D. Atendiendo a la Figura 1, observamos que x varía entre $x = 0$ y $x = 3$ mientras que y lo hace entre la parte inferior y la parte superior de la parábola $x = 3 - 4y^2$. Así,

$$\int_D x^3 y\,dA = \int_0^3 \int_{-\sqrt{\frac{3-x}{4}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{4}}} x^3 y\,dy\,dx$$

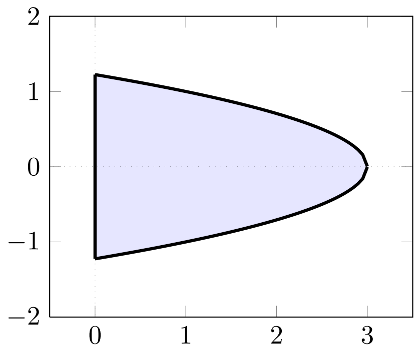


Figura 1: Región D del Ejercicio 526

$$= \int_0^3 \frac{x^3y^2}{2}\bigg|_{-\sqrt{\frac{3-x}{4}}}^{\sqrt{\frac{3-x}{4}}} dx = 0.$$

529 La región de integración es la intersección del círculo centrado en el origen y radio $\sqrt{2}$ ($x^2+y^2 \leq 2$) y la parte sobre la parábola $y = x^2$. Los puntos de corte de ambas curvas $y = x^2$ y $x^2 + y^2 = 2$ son $(-1, 1)$, $(1, 1)$ (véase la Figura 4.2(a)). En consecuencia la integral pedida es

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 2y\, dy\, dx.$$

Nótese que la curva que limita superiormente la región D es precisamente $y = \sqrt{2 - x^2}$. La integración interior es

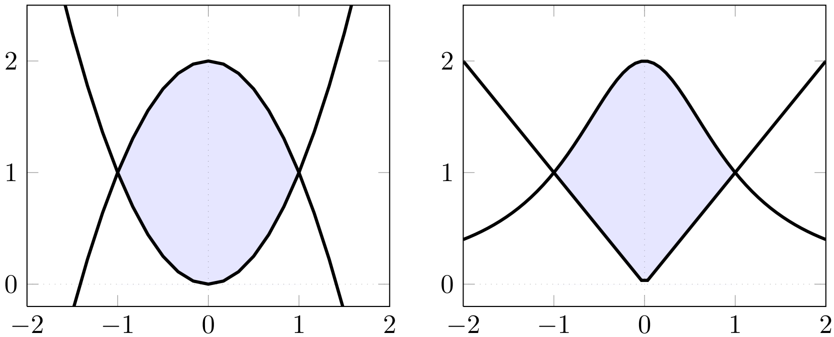
$$\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} 2y\, dy = y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} = 2 - x^2 - x^4,$$

y la segunda integración iterada arroja el valor

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^4)\, dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{44}{15}.$$

530 Para hacernos una idea de la región de integración es importante realizar un boceto de las dos curvas que limitan la región D. Véase la Figura 4.2(b). Las coordenadas de los dos puntos de corte se encuentran resolviendo el sistema

$$y = |x|\,, \quad y = \frac{2}{1 + x^2}.$$



(a) 529 (b) 530

Figura 2: Regiones de integración de los Ejercicios 529 y 530

Las soluciones se obtienen inmediatamente. De hecho debido a la simetría, basta considerar la raíz positiva de la ecuación

$$x = \frac{2}{1+x^2}.$$

Se obtiene sin dificultad $x = 1$. Los puntos de corte que nos determinan los límites de integración para la variable x son por tanto -1 y 1. Así la integral solicitada I será

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{\frac{2}{1+x^2}} \, dy \, dx.$$

La integral interior vale

$$\int_{|x|}^{\frac{2}{1+x^2}} \, dy = \frac{2}{1+x^2} - |x| \, ,$$

y la integral segunda será

$$\int_{-1}^{2} \frac{2}{1+x^2} - |x| \, dx = 2 \arctan x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} |x| \, dx.$$

Desglosando la segunda integral en los intervalos $[-1,0]$, $[0,1]$ para tratar el valor absoluto, encontramos inmediatamente que

$$I = \pi - 1.$$

531 Calcular el área de la región del plano acotada por las curvas $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, mediante integración doble.

■ Calcular los volúmenes de los sólidos acotados en cada caso mediante integración doble:

$\boxed{\mathbf{532}}$ El grafo de $z = \operatorname{sen} y$,$0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{533}}$ La superficie $z = x^2 + y$ sobre $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$.

534 La superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = 10$.h

$\boxed{\mathbf{535}}$ El grafo de $z = \frac{xy}{2}$ sobre la región limitada por $x = 2$, $y = x$, $y = 0$.

536 Superficie $z = xy$ sobre la región acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $y = (x-2)^2$.

537 Volumen del primer octante bajo el plano $z = x+y$ y sobre $x^2+4y^2 \le 4$.

Solución:

534 La proyección de la región en cuestión sobre el plano XY corresponde al círculo $x^2 + y^2 \le 10$ (véase la Figura 4.3(a)). La descripción de este círculo en coordenadas cartesianas es

$$-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}, \quad -\sqrt{10-x^2} \le y \le \sqrt{10-x^2}.$$

Por simetría el volumen V del sólido pedido corresponderá a la integral

$$V = 4\int_0^{\sqrt{10}}\int_0^{\sqrt{10-x^2}} \left[10 - (x^2+y^2)\right]\, dx.$$

Tras la integración interna encontramos

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\sqrt{10}} (10-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

El cambio de variable $x = \sqrt{10}\operatorname{sen} t$ conduce a

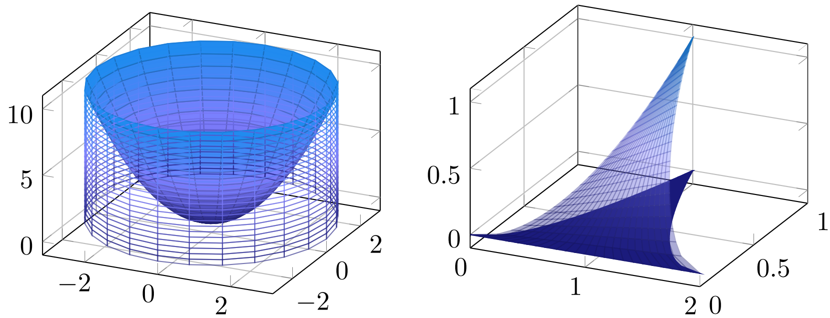
$$V = \frac{800}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt,$$

y mediante las fórmulas del ángulo doble, podemos escribir

$$\begin{aligned}\cos^4 t = \cos^2 t(1-\operatorname{sen}^2 t) = \cos^2 t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2t)\\ = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}.\end{aligned}$$

Así

$$V = \frac{800}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}\right) dt$$



(a) Ejercicio 534 (b) Ejercicio 536

Figura 3: Volúmenes de sólidos mediante integración doble

$$= \frac{800}{3}\left(\frac{3}{8}t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4t)}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 50\pi.$$

536 La región acotada por $y = 0$ y las dos parábolas $y = x^2$ e $y = (x-2)^2$ queda determinada por

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \qquad 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le (x-2)^2,$$

o bien por

$$0 \le y \le 1, \quad \sqrt{y} \le x \le 2 - \sqrt{y}.$$

Véase la Figura 4.3(b). Obsérvese que la segunda raíz debe tener signo negativo. En consecuencia el volumen pedido V se puede encontrar usando cualquiera de estas dos descripciones. Por ejemplo

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\,dx\,dy.$$

La integración interna proporciona

$$V = \int_0^1 2y(1-\sqrt{y})\,dy,$$

y por tanto, después de realizar esta segunda integración que es también inmediata, encontramos

$$V = \frac{1}{5}.$$

¿Podría el lector encontrar el volumen usando la primera descripción de la región de integración?

537 En este caso la región de integración sobre el plano XY se describe como

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

de suerte que el volumen V solicitado será

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} (x + y)\, dy\, dx.$$

La integración interna inmediata conduce a

$$V = \int_0^2 \left(x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx$$

Esta integración lleva a

$$V = \left(-\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right)\Bigg|_0^2 = 2.$$

La Figura 4 muestra un boceto de la situación.

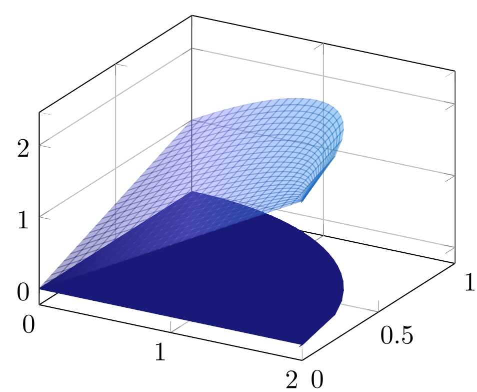


Figura 4: Gráfica del Ejercicio 537

$\boxed{\textbf{538}}$ Evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{1-x^2}^{2-2x^2} (x^2 + xy - 1)\, dy\, dx$$

y describir la región D en la que se está integrando.

539 Evaluar la integral doble de $f(x,y) = xy$ sobre el recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 3x$.

Solución 539:

Para hacernos una idea de cómo describir la región de integración debemos intentar hacer un boceto de la situación de las dos parábolas. Encontramos en primer lugar los puntos de corte de ambas que serán las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 3x.$$

Dichas soluciones son $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$. Estos serán por tanto los límites de integración para x. En realidad, la región se describe como (véase la Figura 5)

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3, \quad x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 3x,$$

y el volumen será

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \int_{x^2-4x+3}^{-x^2+3x} xy\, dy\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{x}{2} \left((-x^2+3x)^2 - (x^2-4x+3)^2 \right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{8}x^4 + 4x^3 - \frac{9}{4}x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{3} = \frac{625}{128}.$$

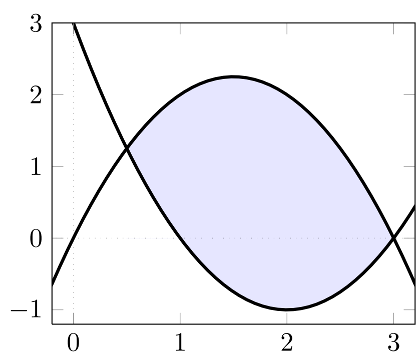


Figura 5: Región entre las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 3x$

$\boxed{540}$ Calcular la siguiente integral $\int_D xy^2\, dA$, donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 \leq y^2 \leq x^2 + 1, \; y \geq 0\}.$$

541 Calcula la integral doble

$$\int_R 4xy\,dA,$$

donde R es el recinto limitado por las curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x - 1$.

Solución 541:

Para determinar los límites de integración para la variable x, buscamos los puntos de intersección de la parábola $y = 1 - x^2$ y la recta $y = x - 1$ resolviendo para ellos la ecuación

$$1 - x^2 = x - 1.$$

Así encontramos que la región R de integración es

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x^2,$$

y la integral doble pedida I será

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} 4xy\,dy\,dx = \int_{-2}^{1} 2x\left((1-x^2)^2 - (x-1)^2\right)\,dx \\ &= \int_{-2}^{1} (2x^5 - 6x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

542 Cambia el orden de integración en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{y} f(x, y)\,dx\,dy.$$

■ En las integrales siguientes cambiar el orden de integración:

543 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\,dr\,d\theta.$

544 $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \frac{x + y}{\operatorname{sen} x}\,dy\,dx.$

545 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|x|}^{1} \frac{x^2 - y}{x^2 + 1}\,dy\,dx.$

546 $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^{1} (x + y^2)\,dx\,dy.$

Solución 545:

La región de integración de esta integral es

$$-1 \leq x \leq 1, \quad |x| \leq y \leq 1.$$

Es importante tener presente el boceto que representa esta región en

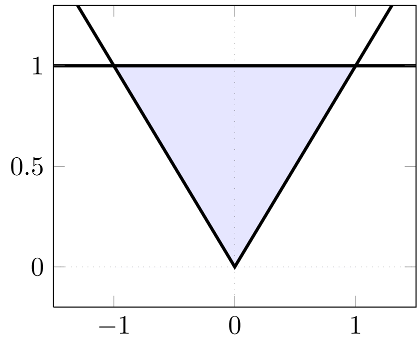


Figura 6: Región de integración en el Ejercicio 545

el plano (Figura 6). En dicho boceto observamos que la variable y se mueve desde 0 a 1, $0 \leq y \leq 1$, y para cada una de estas y, la variable x se debe mover desde $-y$ hasta y. Así el cambio de orden de integración nos lleva a escribir la misma integral como

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} \frac{x^2 - y}{x^2 + 1}\, dx\, dy.$$

■ Calcular las siguientes integrales mediante un cambio de orden y esbozar la región de integración:

547 $\displaystyle\int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} x\, dy\, dx.$

548 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{y^2-4}^{4-y^2} y\, dx\, dy.$

549 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\operatorname{sen} y} dx\, dy.$

550 $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{y+2}^{1+\sqrt{1-y^2}} 2y\, dx\, dy.$

551 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y\sqrt{x^4+1}\, dx\, dy.$

552 $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \sqrt{x^4+1}\, dx\, dy.$

Solución:

549 La región de integración viene descrita por

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \operatorname{sen} y,$$

y está representada en la Figura 7.

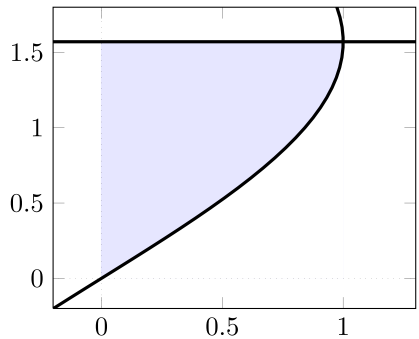


Figura 7: Gráfica del Ejercicio 549

El cambio de integración nos lleva a

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \operatorname{arc\,sen} x \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

No obstante, la integración resulta más sencilla si la evaluamos sin realizar el cambio de integración, es decir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{sen} y} dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y\, dy = 1.$$

550 La región se describe por

$$-1 \leq y \leq 0, \quad y + 2 \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2}.$$

La ecuación $x = y + 2$ es una recta mientras que $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ es una parte de la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. De este modo resulta sencillo esbozar la región de integración (véase la Figura 8). El cambio de orden de integración nos lleva a

$$1 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq x - 2.$$

Así la integral será

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{x-2} 2y\, dy\, dx,$$

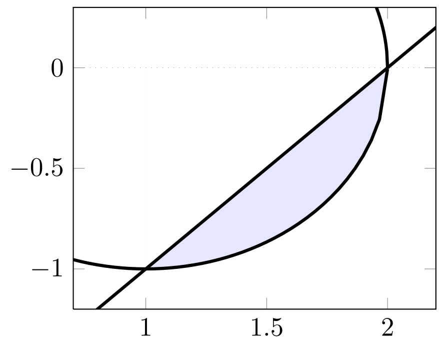


Figura 8: Región de integración en el Ejercicio 550

y su cálculo se realiza sin mayores dificultades

$$\int_1^2 \left[(x-2)^2 - (2x-x^2)\right] dx = \left(\tfrac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x\right)\Big|_1^2 = -\tfrac{1}{3}.$$

552 La región que se describe por

$$0 \le y \le 1, \quad \sqrt[3]{y} \le x \le 1,$$

(ver Figura 9) también se puede determinar, cambiando el orden de las variables, por

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^3,$$

y la integral será

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\, dx = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\, dx$$
$$= \frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

553 Calcular la integral doble

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx.$$

554 Calcular la integral doble

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^{\frac{1}{x}} y^3 x e^{x^2y^2}\, dy\, dx.$$

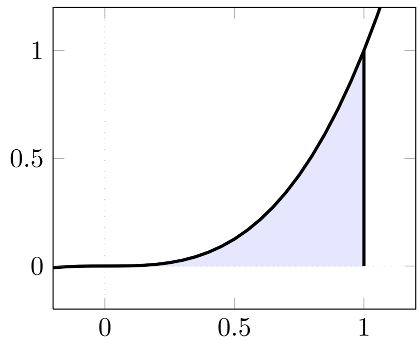


Figura 9: Ejercicio 552: región dada por $0 \leq y \leq 1$, $y^{1/3} \leq x \leq 1$

Solución 554:

Observamos que resulta más sencillo integrar respecto a x que respecto a y, lo cual aconseja cambiar el orden de integración. De este modo tendremos que la región

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq \frac{1}{x},$$

se describe también como

$$1 \leq y \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{y},$$

y la integral resulta

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} y^3 x e^{x^2y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 \frac{y}{2}\, e^{x^2y^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}}\, dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y}{2}\left(e - e^{\frac{y^2}{4}}\right) dy = \left(\frac{e}{4}y^2 - e^{\frac{y^2}{4}}\right)\Big|_1^2 = e^{\frac{1}{4}} - \frac{e}{4}.$$

4 2

INTEGRALES TRIPLES

■ Calcular las siguientes integrales triples:

555 $\displaystyle\int_W x^2\, dV$, $W = [0,1]^3$.

556 $\displaystyle\int_W xyz\,dV$, $W = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$.

557 $\displaystyle\int_W (x+y+z)\,dV$, $W = [0,2]\times[0,3]\times[0,1]$.

558 $\displaystyle\int_W \operatorname{sen}(x+y+z)\,dV$, $W = [0,\pi]^3$.

Solución 558:

La integral triple que nos solicitan es

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx.$$

En cada integración iterada, consideramos las variables respecto de las que no estamos integrando como si fueran constantes de manera análoga a como hacíamos con las integrales dobles, para obtener en pasos sucesivos,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \int_0^\pi (-\cos(x+y+z))\big|_0^\pi \,dy\,dx\\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi (\cos(x+y) - \cos(\pi+x+y))\,dy\,dx\\
&= \int_0^\pi (\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(\pi+x+y))\big|_0^\pi \,dx\\
&= \int_0^\pi (\operatorname{sen}(\pi+x) - \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}(2\pi+x) + \operatorname{sen}(\pi+x))\,dx.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, debido a la periodicidad del seno, $\operatorname{sen}x$ y $\operatorname{sen}(2\pi+x)$ son iguales, tendremos finalmente

$$I = 2\int_0^\pi (\operatorname{sen}(\pi+x) - \operatorname{sen}x)\,dx$$
$$= 2\,(\cos x - \cos(\pi+x))\big|_0^\pi = -8.$$

■ Evaluar las siguientes integrales triples y esbozar la región de integración:

559 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^y y\,dz\,dy\,dx$.

560 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^y \int_0^{x+y} (x+y+z)\,dz\,dx\,dy$.

561 $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} \int_0^{xy} 4z\,dz\,dy\,dx$.

562 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$

563 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x} \int_y^{2y} \sqrt{x+y+z}\,dz\,dy\,dx.$

564 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{1} \int_{x^2}^{1} z\,dz\,dy\,dx.$

Solución:

560 En este tipo de integrales triples suele ser más delicado el esbozar o imaginarse la región de integración en el espacio que la propia integración en sí. La tarea de esbozar la región de integración es prácticamente obligatoria cuando se presenta un cambio en el orden de integración. Por esta razón es tan importante ejercitarse en la tarea de representar las regiones de integración de las integrales triples. En el caso que nos ocupa

$$I = \int_0^2 \int_0^y \int_0^{x+y} (x+y+z)\; dz\,dx\,dy,$$

y la región de integración queda determinada por las desigualdades

$$0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le z \le x+y.$$

Para obtener la gráfica partimos de la descripción que nos reflejan los límites que acotan las variables. La última de ellas, en este caso $0 \le z \le x+y$, nos dice que la región está limitada por las superficies $z=0$ y $z=x+y$ a lo largo del eje Z. Mientras que la proyección de dicha región a lo largo de este eje está determinada por las otras dos variables. En la Figura 10 se puede ver dicha región de integración.

Como hemos observado el cálculo de la integral es prácticamente automático cuando las primitivas involucradas en las distintas integrales iteradas son inmediatas. Así

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^y \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right)\Big|_0^{x+y} dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^y \frac{3}{2}(x+y)^2\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(x+y)^3\Big|_0^y dy \\ &= \int_0^2 \frac{7}{2} y^3\,dy = \frac{7}{8} y^4 \Big|_0^2 = 14. \end{aligned}$$

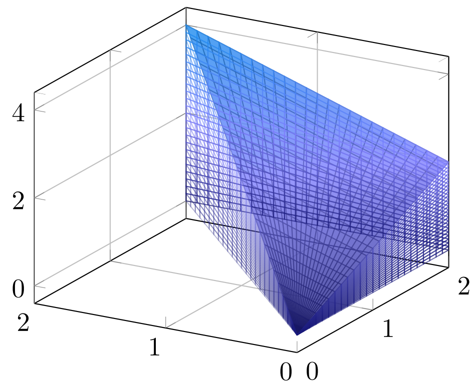


Figura 10: Región de integración en el Ejercicio 560

564 Como en el ejemplo precedente, la región de integración viene determinada por las desigualdades

$$-1 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1, \quad x^2 \leq z \leq 1.$$

Dicha región está esbozada en la Figura 11.

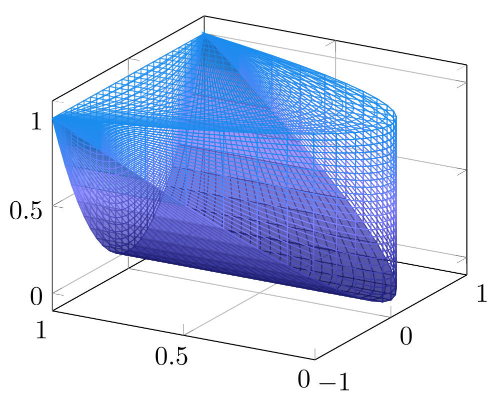


Figura 11: Representación gráfica del Ejercicio 564

El cálculo de la integral es inmediato:

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{x^2}^{1} z \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \frac{1 - x^4}{2} \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1 - x^4)(1 - x^2)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{64}{105}.$$

■ Hallar la integral triple de la función $f(x, y, z)$ en el recinto W dado, en los siguientes casos:

565 $f(x, y, z) = x + y + z$, W tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$.

566 $f(x, y, z) = xyz$, W es el recinto bajo la superficie $z = 1 - x^2$ sobre el rectángulo $[-1, 1] \times [0, 2]$ del plano XY.

567 $f(x, y, z) = x^2$, W es el tetraedro contenido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

568 $f(x, y, z) = x + y$, W es la región entre las superficies $z = 2 - x^2$ y $z = x^2$, para $0 \leq y \leq 3$.

Solución:

567 En este tipo de ejemplos nos identifican de manera descriptiva la región de integración y como paso importante debemos previamente concretarla en forma de desigualdades que involucren apropiadamente las variables. Esto supone además realizar una elección juiciosa sobre el orden de integración más conveniente. En este caso concreto, como la función a integrar no presenta ninguna dificultad, ningún orden de integración supone una ventaja esencial sobre ningún otro, de modo que elegimos por ejemplo $dz\,dy\,dx$ y en consecuencia debemos describir la región de integración del modo siguiente (véase la Figura 12)

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - y - x.$$

Nótese que la proyección de la región W a lo largo del eje Z (primera variable de integración elegida) corresponde al triángulo en el plano XY determinado por las rectas $y = 0$, $y = 1 - x$ ($x + y + z = 1$ cuando $z = 0$). Finalmente la proyección de este triángulo a lo largo del eje Y (segunda variable de integración) sobre el eje X es el intervalo $0 \leq x \leq 1$ que son los límites para la última variable de integración. El cálculo de la integral no plantea ninguna dificultad especial. Su valor final es $\frac{1}{60}$.

568 Como en el ejemplo precedente, la dificultad real de este ejercicio consiste en describir convenientemente la región de integración. La información que nos proporcionan nos lleva a determinar los límites para las variables x y z como la intersección entre las superficies

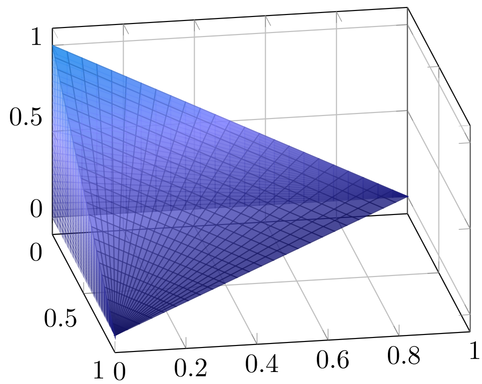


Figura 12: Volumen de integración del Ejercicio 567

$z = 2 - x^2$ y $z = x^2$, sabiendo que $0 \leq y \leq 3$. Dicha intersección se determina resolviendo el sistema

$$z = 2 - x^2, \quad z = x^2,$$

que conduce trivialmente a la ecuación cuadrática

$$x^2 = 2 - x^2,$$

con soluciones -1 y 1. En consecuencia $-1 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq z \leq 2-x^2$ y $0 \leq y \leq 3$. Dicha región puede verse en la Figura 13. El cálculo de la integral es ahora sencillo. Su valor final es 12.

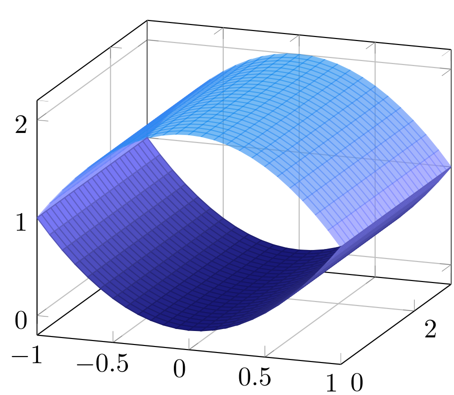


Figura 13: Gráfica del Ejercicio 568

569 Sea D la región limitada en $\mathbb{R}^3$ por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y los planos $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$. Evaluar la integral $\displaystyle\int_D x\,dV$.

Solución 569:

Lo importante de este ejercicio consiste en describir correctamente la región de integración. Se ha intentado esbozarla en la Figura 14. Una vez representada, es claro que la proyección sobre el plano XY corresponde al cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$, mientras que la variable z se mueve entre la parte negativa y la parte positiva de la superficie esférica. Así,

$$\int_D x\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx.$$

Puesto que la función integrando es x (que es función impar de x) y la región de integración es simétrica respecto plano YZ (o respecto al eje X), podemos anticipar que la integral solicitada debe anularse pues la parte positiva de la integral cancelará con la parte negativa de la misma.

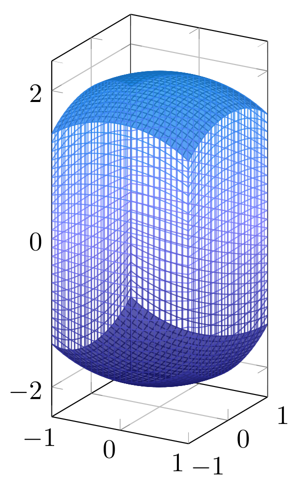


Figura 14: Gráfica del Ejercicio 569

570 Evaluar la integral $\displaystyle\int_W (1-z^2)\,dV$ donde W es la pirámide de vértice superior $(0,0,1)$ y vértices en la base $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$.

■ Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales para obtener las otras cinco formas de la respuesta:

571 $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y f\,dz\,dy\,dx.$

572 $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{2-x-y} f\,dz\,dy\,dx.$

573 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{y+z-1}^0 f\,dx\,dy\,dz.$

574 $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} f\,dy\,dx\,dz.$

Solución 574:

En resumidas cuentas, la tarea propuesta consiste en describir la región

$$0 \le z \le 1, \quad 0 \le x \le z, \quad 0 \le y \le \sqrt{z^2 - x^2},$$

de las otras cinco maneras posibles. Para ello es prácticamente imprescindible tener muy presente el boceto de la región en el espacio (véase la Figura 15). A través de este boceto y realizando las proyecciones opor-

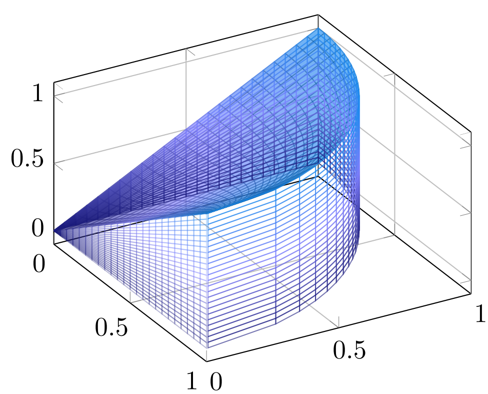


Figura 15: Región de integración del Ejercicio 574

tunas según qué orden de integración estemos siguiendo, se obtienen las otras cinco descripciones de dicha región, en concreto

$$0 \le x \le 1, \quad x \le z \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{z^2 - x^2},$$
$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{1 - y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1,$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1,$$
$$0 \le z \le 1, \quad 0 \le y \le z, \quad 0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2},$$
$$0 \le y \le 1, \quad y \le z \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2}.$$

575 Evaluar $\int_W x^2 \cos z \, dV$ siendo W la región limitada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

■ Hallar los volúmenes que se indican mediante integración triple.

576 Sólido limitado superiormente por $z = x + y$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

577 Sólido limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$ y $x = z - y - 1$.

578 Volumen comprendido entre $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$ y $x + y + 2z = 2$.

579 El sólido determinado por $x^2 + y^2 \leq a^2$ y $x^2 + z^2 \leq a^2$.

580 Región entre $z = \cos^2(x + y)$ y $z = -\operatorname{sen}(x + y)$ sobre $[0, \frac{\pi}{2}]^2$.

581 Volumen limitado por $z = x^2$, $y + z = 4$, $y = 0$.

582 Sólido acotado por $z = 10 - x^2 - y^2$, $y = x^2$, $z = 0$.

583 Región limitada por $y = 4 - x^2 - z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + z = 2$.

Solución:

578 El primer paso consiste en hacerse una idea exacta de la región cuyo volumen tenemos que calcular. Observemos que la ecuación $x^2 + 2y^2 = 2$ representa en el espacio un cilindro de base elíptica centrado en el origen mientras que la ecuación $x + y + 2z = 2$ determina un plano. Nótese además que dicho plano corta al cilindro en una elipse que está toda ella contenida en el semiespacio superior donde $z \geq 0$. El volumen que debemos calcular vendrá dado por la integral doble:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} \int_{0}^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} dz \, dx \, dy,$$

Las dos primeras integraciones nos llevan a

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\left(1 - \frac{y}{2}\right) x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_{-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} dy,$$

de donde resulta que

$$V = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} (2 - y) \sqrt{1 - y^2} \, dy,$$

lo que a su vez podemos desglosar en

$$V = 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - \sqrt{2}\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

Obsérvese cómo la segunda integral se anula al tratarse de un integrando impar sobre un intervalo simétrico respecto al origen, mientras que la primera corresponde al área de un semicírculo de radio uno centrado en el origen. En consecuencia el volumen solicitado será

$$V = \sqrt{2}\pi.$$

583 La Figura 16 representa el sólido cuyo volumen nos piden. Puesto que en la ecuación de la superficie $y = 4 - x^2 - z^2$ la variable y nos la dan "despejada" podemos pensar en encontrar el volumen integrando dicha función y sobre la proyección del sólido sobre el plano XZ. El boceto nos deja bien claro que tal proyección es el triángulo

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2 - x,$$

y en consecuencia el volumen V será

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-x^2-z^2} dy\,dz\,dx.$$

Dicha integral no plantea ninguna dificultad de cálculo pues todas las integraciones que aparecen son inmediatas. Así se obtiene $V = \frac{16}{3}$.

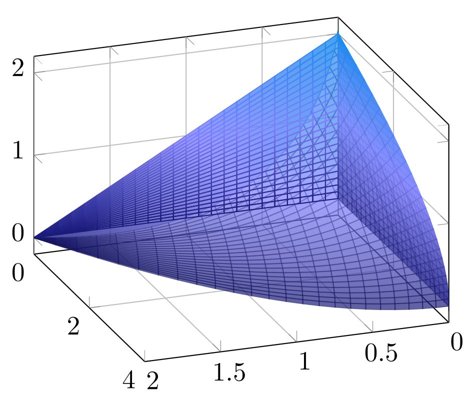


Figura 16: Gráfica del Ejercicio 583

■ Escribir (no evaluar) la integral correspondiente al volumen de las siguientes regiones:

$\boxed{584}$ Sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el disco unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.

585 Sólido determinado por las condiciones $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ y $x^2+y^2-z^2 \leq 0$.

$\boxed{586}$ Región entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

587 Región determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ y $2x^2 + z^2 \leq 1$.

Solución:

585 La desigualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

describe la esfera sólida (el interior de la esfera) centrada en el origen y de radio 1, mientras que

$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$$

corresponde a la parte "interior" de la hoja superior del cono $(z = \sqrt{x^2 + y^2})$, y también a la parte interior de la hoja inferior del cono $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. La intersección de ambas regiones es el sólido cuyo volumen debemos indicar. Ver la Figura 17. Por simetría basta

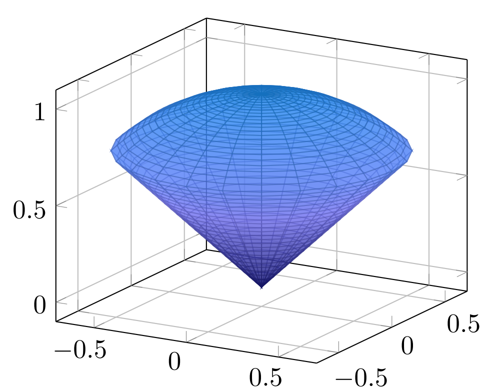


Figura 17: Ejercicio 585: región entre un cono y una esfera

indicar el volumen superior y multiplicar por 2, e incluso, si nos centramos en el primer octante, podemos multiplicar el volumen resultante por 8 para obtener el volumen total. Nótese que la región resultante tiene forma de un "helado". Dicho volumen lo podemos entender como el limitado entre los grafos de las funciones

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

integrado sobre su proyección en el plano XY. Para determinar esta proyección debemos concretar el círculo intersección de las dos superficies, es decir, resolver el sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Tras eliminar $x^2 + y^2$, llegamos inmediatamente a

$$2z^2 = 1,$$

por lo que $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y por tanto

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Esto significa que el círculo intersección en el plano XY está centrado en el origen y tiene radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finalmente,

$$V = 8\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\,dy\,dx.$$

587 Las dos desigualdades que nos proponen representan:

(I) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$: esfera sólida centrada en el origen y radio 2;

(II) $2x^2 + z^2 \leq 1$: interior de un cilindro de base elíptica a lo largo del eje Y.

Véase la Figura 18. El modo más cómodo de describir la región

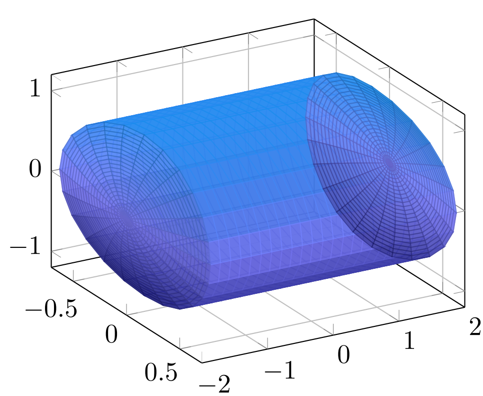


Figura 18: Gráfica del Ejercicio 587

intersección de las dos indicadas más arriba consiste en entenderla entre el grafo de las funciones

$$-\sqrt{4-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2-z^2},$$

integrando sobre la proyección sobre el plano XZ. Dicha proyección es precisamente la elipse que define el cilindro $2x^2 + z^2 \leq 1$. Por simetría podemos escribir que el volumen solicitado es

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}} \sqrt{4 - x^2 - z^2}\, dx\, dz.$$

588 Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 \leq 4 - z$, $x^2 \leq 3y$, $z \geq 0$.

4 3 CAMBIOS DE VARIABLE

■ Calcular el área encerrada por las siguientes curvas en polares mediante integración doble:

589 Área del círculo $r = \alpha$.

590 Área acotada por la cardioide $r = 1 + \cos(2\theta)$.

591 Área entre los círculos $r = 1$ y $r = 2\,\text{sen}\,\theta$.

592 Área interior a la curva $r = 2 + \cos\theta$ y exterior al círculo $r = 2$.

Solución 591:

Para identificar de manera más clara la curva $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, multiplicamos la misma por r e identificamos los términos en coordenadas rectangulares

$$x^2 + y^2 = 2y,$$

o reagrupando términos

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Vemos que efectivamente se trata del círculo centrado en $(0,1)$ y radio 1. Para determinar el área en coordenadas polares necesitamos conocer el ángulo en que se produce el corte de los dos círculos

$$1 = r = 2\,\text{sen}\,\theta.$$

Vemos sin ninguna dificultad que se trata de $\theta = \frac{\pi}{6}$. Por tanto, y debido a la simetría de la figura, tendremos

$$A = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\,\text{sen}^2\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, d\theta\right).$$

Recuérdese que el área encerrada por una figura dada en polares $r = f(\theta)$ entre los ángulos θ_1 y θ_2 viene dada por la integral

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(\theta)^2}{2}\, d\theta.$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo doble

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

para realizar la integración anterior, llegamos a que el área pedida es $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

■ Evaluar las siguientes integrales usando el cambio a polares donde la región D está determinada en cada caso por las ecuaciones y condiciones dadas:

593 $\displaystyle\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$, D comprendido por $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$.

594 $\displaystyle\int_D xy\, dA$, D limitado por $x^2+y^2 = 2$, $y \leq x$ e $y > 0$.

595 $\displaystyle\int_D (x+y)\, dA$, D acotado por $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $y = x$, $y = -x$ con $y \geq 0$.

596 $\displaystyle\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dA$, D limitado por $x = 2$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

597 $\displaystyle\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$, $D = \{x^2+y^2 \leq 2x\}$.

Solución:

593 Probablemente el paso más importante en el cambio de una integral a polares sea la descripción del recinto de integración en tal sistema de coordenadas. Según la Figura 19 que concreta cuál es la región de integración en este ejemplo, vemos inmediatamente que el ángulo θ varía entre los límites $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$. Para cada ángulo θ en ese rango, el radio debe llegar hasta cortar la recta $x = 1$, es decir,

$$r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}.$$

En consecuencia, la descripción del recinto de integración en coordenadas polares será

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta}.$$

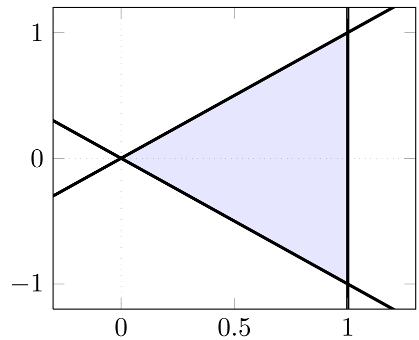


Figura 19: Región de integración del Ejercicio 593

La integral solicitada será, teniendo en cuenta el jacobiano r,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2\cos\theta}{2}\right|_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta.$$

Un cambio de variable trigonométrico del tipo $t = \operatorname{sen}\theta$ da lugar a la integral

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

595 En este caso la región de integración es la corona descrita por

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},\quad 1\le r\le 2.$$

(véase la Figura 20). Por la tanto la integral que nos ocupa se escribe en coordenadas polares como

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 r^2\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right)\,dr\,d\theta.$$

Las dos integraciones que se deben realizar son directas y no ofrecen mayores dificultades. El resultado final es $\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

597 La región de integración en este caso, escrita en coordenadas polares, es

$$r\le 2\cos\theta$$

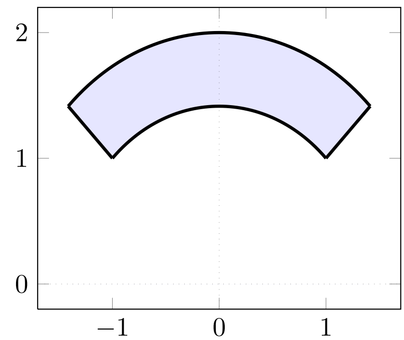


Figura 20: Representación gráfica del Ejercicio 595

que representa el interior del círculo centrado en $(1, 0)$ y radio 1. Esta conclusión se puede obtener de manera clara si se completan cuadrados en la forma del recinto en coordenadas rectangulares

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

En este caso los límites de integración para θ deben ser $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, pues es el intervalo de ángulos en que está definido dicho círculo. Así vemos que la integral que nos interesa es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} dr\, d\theta.$$

Los cálculos concretos no suponen ninguna dificultad especial. El valor de la integral es 4.

598 Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2},\, x \geq \sqrt{3}y \geq 0\}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable. Escribir la integral doble $\int\int_D f\, dA$ en términos de integrales iteradas de la siguiente forma:

(a) $\int\int f(x, y)\, dx\, dy.$

(b) $\int\int f(x, y)\, dy\, dx.$

(c) $\int\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta.$

599 Considérese la integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx.$$

(a) Determinar los límites de integración para poder escribir I de la forma

$$I = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx\, dz.$$

(b) Calcular el valor de dicha integral mediante un cambio de variables adecuado.

Solución 599:

La primera parte de este ejercicio consiste en invertir el orden de integración de $dz\, dy\, dx$ a $dy\, dx\, dz$. Esto exige realizar un boceto preciso de la región de integración descrita por

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$$

(véase la Figura 21).

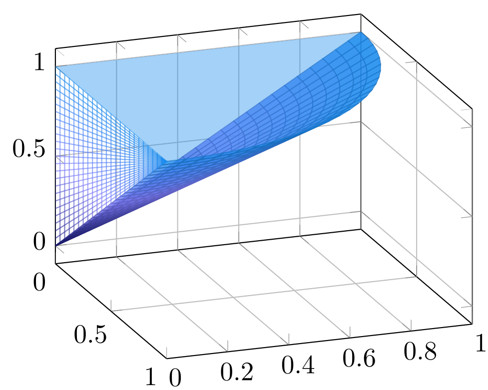


Figura 21: Gráfica de la región del Ejercicio 599

Se trata del primer cuarto del interior del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitado superiormente por el plano $z = 1$. El cambio de orden de integración pedido nos lleva a observar que $0 \le z \le 1$. Para cada tal z, la proyección del recinto sobre el plano XZ queda determinada por

$$0 \le x \le z.$$

Finalmente la variable y, para cada par (x, z) de los descritos, tendrá unos límites

$$0 \le y \le \sqrt{z^2-x^2}.$$

La integral será

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx\, dz.$$

La segunda parte del problema consiste en calcular la integral anterior mediante un cambio juicioso de variables. Tenemos esencialmente dos posibilidades: las coordenadas cilíndricas o las esféricas. En coordenadas cilíndricas la región de integración se describe de manera muy simple como

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq 1.$$

La integral en coordenadas cilíndricas será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_r^1 \frac{e^{z^2}}{r} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Al realizar la primera integración debemos enfrentarnos a la primitiva de e^{z^2}. Dicha primitiva no existe en términos elementales, de modo que debemos explorar un cambio de orden de integración en la integral triple. Es muy sencillo escribir dicha integral en el orden $dr \, dz \, d\theta$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^z e^{z^2} \, dr \, dz \, d\theta.$$

La primera integración iterada nos lleva a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z e^{z^2} \, dz \, d\theta.$$

Ésta resulta ahora inmediata. Nótese la diferencia esencial entre ambos órdenes de integración. El valor final de la integral es $\frac{\pi}{4}(e-1)$.

■ Realizar el cambio a polares en las siguientes integrales dobles:

600 $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$

601 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy.$

602 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x,y) \, dy \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx.$

603 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y^{2/3}-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy.$

Solución:

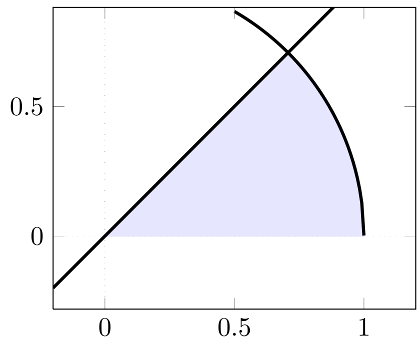


Figura 22: Gráfica del Ejercicio 602

602 La región descrita por estas dos integrales dobles aparece en la Figura 22. Resulta interesante observar cómo esta misma región es de muy sencilla descripción en coordenadas polares al tener simetría circular. En efecto, la integral resultante es

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

603 La región de integración viene representada en la Figura 23. De este modo el ángulo tiene por límites 0 y $\frac{\pi}{2}$ mientras que el radio debe moverse desde 0 hasta la ecuación de la curva

$$x^2 = y^{2/3} - y^2.$$

Pasando a polares y despejando el radio se obtiene de manera sencilla, después de unos cuantos cálculos,

$$r = \sqrt{\operatorname{sen}\theta},$$

de modo que la integral queda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

604 Encontrar el volumen de la región determinada por $x^2+y^2+z^2 \leq 10$, $z \geq 2$ mediante integración doble.

605 Calcula la integral doble

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^x \frac{y(x^2+y^2)}{x^3} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx.$$

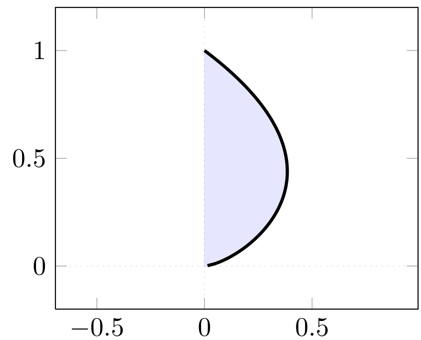


Figura 23: Región de integración del Ejercicio 603

Solución 605:

Cualquiera de los dos posibles órdenes de integración en coordenadas rectangulares parece bastante complicado. Intentémoslo en coordenadas polares. La región de integración (véase la Figura 24) nos lleva a los límites

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{1}{2}\sec\theta \leq r \leq \sec\theta,$$

donde las secantes aparecen al pasar las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ a polares. Así se trata de calcular la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{2}\sec\theta}^{\sec\theta} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta} e^{r^2} r \, dr \, d\theta.$$

La integración con respecto a r es directa y nos lleva a

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\left(e^{\frac{1}{\cos^2\theta}} - e^{\frac{1}{4\cos^2\theta}}\right) d\theta.$$

Es interesante observar ahora que la derivada del exponente $\frac{1}{\cos^2\theta}$ es precisamente la fracción que acompaña a tales exponenciales. De este modo el cambio de integración $t = \frac{1}{\cos^2\theta}$ lleva directamente al resultado

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{\cos^2\theta}} - 4e^{\frac{1}{4\cos^2\theta}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

Después de realizar estos cálculos con un poco de cuidado obtenemos el resultado final

$$\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e - e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{4}}.$$

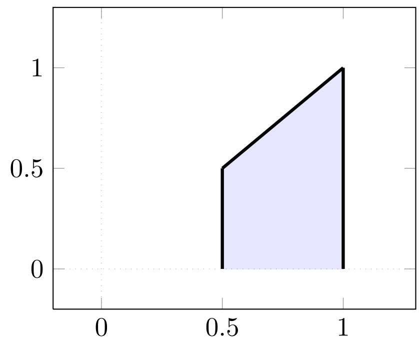


Figura 24: Representación gráfica del Ejercicio 605

■ Evaluar las siguientes integrales en los recintos indicados:

606 $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dA$, donde $D=\{x^2+y^2\leq 4\}$.

607 $\displaystyle\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dA$, con D la región del primer cuadrante entre $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=2$.

608 $\displaystyle\int_D y\,dA$, con D el triángulo de lados $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt{3}x$.

609 $\displaystyle\int dA$, con D la región del primer cuadrante acotada por los círculos $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=x$.

Solución 609:

Después de darse cuenta de que la ecuación $x^2+y^2=x$ representa el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en el $(\frac{1}{2},0)$ (completando cuadrados), y de que en realidad la integral que nos solicitan es el área de la región entre los dos círculos de la Figura 25, podemos encontrar el valor de dicha integral mediante un sencillo argumento geométrico, siendo éste igual a

$$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Vale la pena de todos modos que nuestros lectores planteen dicha integral en coordenadas polares y comprueben que resulta el valor anterior.

610 Calcular la siguiente integral

$$\int_{-1}^{0}\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2}\,dx\,dy.$$

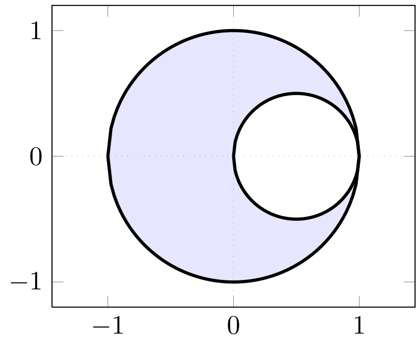


Figura 25: Gráfica del Ejercicio 609

Solución 610:

Denotemos por I la integral pedida. Para cada y fijo en el intervalo $[-1, 0]$, en la integral interior

$$\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

podemos realizar el cambio de integración

$$t = \frac{x}{2}, \quad dt = \frac{dx}{2}.$$

De este modo, dicha integral interior se convierte en

$$2\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{t^2}\,dt,$$

y la integral doble inicial en

$$I = 2\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} e^{t^2+y^2}\,dt\,dy.$$

Ahora si realizamos el cambio a polares, se obtiene de modo inmediato

$$I = 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{1} re^{r^2}\,dr\,d\theta.$$

El valor final de I es $\frac{\pi}{2}(e-1)$.

Alternativamente se puede plantear el siguiente cambio de variables, semejante a las coordenadas polares,

$$x = 2r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

dictado por la simetría de la región de integración y la forma de la función integrando. El jacobiano del cambio es en este caso $2r$.

611 Sea R el rectángulo acotado por las rectas $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-3y=2$ y $2x-3y=5$. Haciendo el cambio de variable $u=x+y$, $v=2x-3y$, encontrar el área de R.

612 Haciendo la sustitución $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$, encontrar el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ e $y=2x$.

613 Calcular el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy=2$, $xy=4$, $xy^3=3$, $xy^3=6$. (Indicación: realizar el cambio de variable $u=xy$, $v=xy^3$).

614 Encontrar el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$ y $x=4y^2$. (Indicación: usar u y v tales que $y=ux^2$, $x=vy^2$).

615 Sea R la región del primer cuadrante acotada por los círculos $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=8y$. Encontrar el valor de la integral

$$\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dA.$$

(Indicación: usar un cambio de variables similar al del Ejercicio 614)

■ Emplear los cambios de variable apropiados para evaluar las siguientes integrales:

616 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$, siendo D el recinto limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

617 $\displaystyle\iiint_S \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz$, donde

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Ayuda:

$$\int \sqrt{1+r^2}\, dr = \frac{r}{2}\sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2}\log\left(r+\sqrt{1+r^2}\right) + \text{cte.}$$

■ Encontrar los siguientes volúmenes:

618 Sólido limitado por $x^2 + y^2 = z$, el plano XY y $x^2 + y^2 = 2x$. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).

619 Sólido limitado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e inferiormente por $z - 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).

620 Sólido limitado por $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ y la parte superior de $z^2 = 2(x^2 + y^2)$. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).

621 Cono circular recto con radio de la base r y altura h. (Indicación: usar coordenadas esféricas).

622 Volumen comprendido entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 12 - x^2 - 2y^2$.

Solución:

618 El sólido descrito por las condiciones dadas está representado en la Figura 26. Intentemos describirlo en coordenadas cilíndricas.

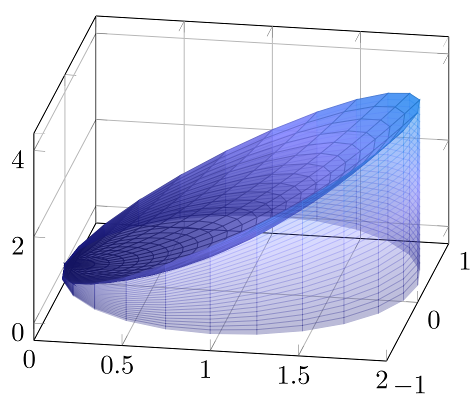


Figura 26: Sólido del Ejercicio 618

Observamos que la base de la región que nos ocupa es el círculo $x^2 + y^2 = 2x$ que es el centrado en $(1, 0)$ y radio 1 (esto se ve completando cuadrados como hemos hecho en alguna otra ocasión). En coordenadas polares (o cilíndricas) este círculo se describe como

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$$

Finalmente la variable z será $0 \leq z \leq r^2$ al ser el paraboloide $z = x^2 + y^2$ la parte que limita superiormente la región. El volumen

será por tanto, debido a la simetría,

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Las integraciones respecto a z y a r no plantean ninguna dificultad. Llegamos así a

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta.$$

Para realizar esta última integración usamos la fórmula

$$\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos(4\theta)}{8},$$

que puede ser obtenidas con facilidad usando las fórmulas del ángulo doble repetidamente (véase el Ejercicio 534). El resultado final es $\frac{3\pi}{2}$.

621 Según el boceto de la Figura 27, el cono circular recto objeto de este problema se describe en coordenadas esféricas como

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \arctan\left(\frac{r}{h}\right), \quad 0 \le \rho \le \frac{h}{\cos\phi}.$$

Nótese que $\rho = \frac{h}{\cos\phi}$ corresponde a la tapa superior del cono $z = h$.

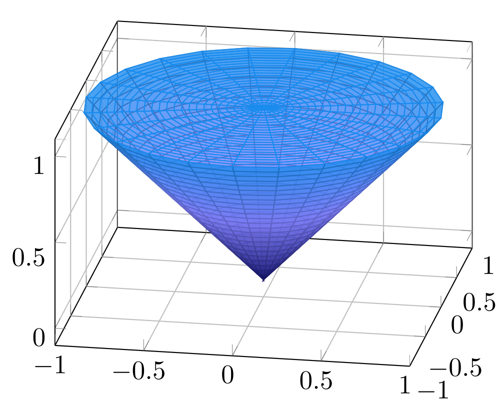


Figura 27: Ejercicio 621: cono circular recto

De este modo el volumen solicitado será

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan\left(\frac{r}{h}\right)} \int_0^{\frac{h}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Después de unas cuantas integraciones inmediatas, y con un poco de cuidado en los cálculos, llegamos a la fórmula del volumen de un tal cono: $\frac{\pi}{3}hr^2$.

622 El volumen pedido en esta ocasión es el limitado por los dos paraboloides de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $z = 12 - x^2 - 2y^2$ según el boceto de la Figura 28. La intersección de ambos paraboloides (proyectada en el plano XY) tendrá por ecuación

$$x^2 + y^2 = 12 - x^2 - 2y^2,$$

es decir, se trata de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación sugiere plantear el problema en las coordenadas

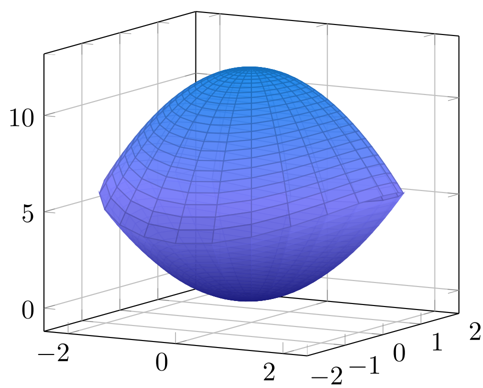


Figura 28: Gráfica del Ejercicio 622

cilíndricas modificadas siguientes

$$x = \sqrt{6}r\cos\theta, \quad y = 2r\operatorname{sen}\theta.$$

Así, en el nuevo sistema de coordenadas, la elipse será $r = 1$ mientras que el jacobiano del cambio se calcula muy sencillamente y es $2\sqrt{6}r$. En consecuencia, el volumen que se pide se calculará mediante la integral triple

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{6r^2\cos^2\theta+4r^2\operatorname{sen}^2\theta}^{12-6r^2\cos^2\theta-8r^2\operatorname{sen}^2\theta} 2\sqrt{6}r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Después de unos cuantos cálculos sencillos pero cuidadosos llegamos al resultado final $12\sqrt{6}\pi$.

623 Describir la superficie dada en coordenadas esféricas por la ecuación $\rho = 1 + \cos\phi$ y calcular su volumen.

■ Calcular el valor de las siguientes integrales empleando para ello un cambio de variables oportuno:

624 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dy\,dx.$

625 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$

626 $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx.$

627 $\displaystyle\int_D ze^{x^2+y^2}\,dV$ en el recinto D limitado por el interior del círculo $x^2+y^2=4$ y $2 \leq z \leq 3$.

628 $\displaystyle\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dV$ con $D = \{x^2+z^2 \leq 2,\ -2 \leq y \leq 3\}$.

Solución:

625 Si nos fijamos en el recinto de integración en el plano, descubriremos que se trata del primer cuadrante del círculo unidad. Además el integrando se transforma de manera muy cómoda a coordenadas polares. Esto sugiere intentar calcular esta integral doble mediante coordenadas polares. De esta manera el recinto de integración es

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

La integral pedida se transforma (sin olvidar el jacobiano del cambio) en

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta.$$

Esta integral es inmediata. Su valor final es $\frac{\pi}{4}\log 2$.

626 En este caso el recinto de integración es el primer cuarto del círculo de radio 1 centrado en el punto $(1,0)$. Esto es sencillo de comprobar si nos percatamos de que la ecuación $y = \sqrt{2x-x^2}$ puede escribirse como parte de $(x-1)^2+y^2 = 1$. Esta ecuación se escribe en polares como $r = 2\cos\theta$, sin más que realizar las operaciones del cambio. No obstante, al escribir la descripción de este recinto de integración en coordenadas polares debemos ser cuidadosos en los límites para

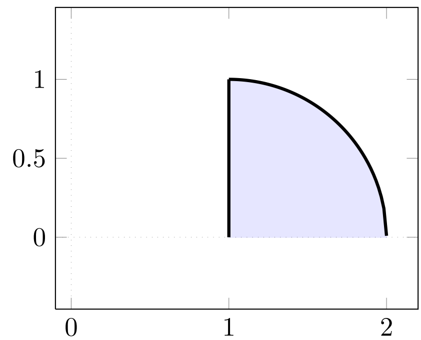


Figura 29: Gráfica del Ejercicio 626

r pues el recinto de integración está delimitado por la recta $x = 1$ y el arco del primer cuarto del círculo indicado (véase la Figura 29). En consecuencia los límites de integración serán

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{1}{\cos\theta} \le r \le 2\cos\theta.$$

El integrando también se transforma de manera muy transparente a coordenadas polares. Mediante el cambio a polares la integral pasa a ser

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} dr\, d\theta.$$

Haciendo un cambio trigonométrico del tipo $t = \operatorname{sen}\theta$ y después de algunos cálculos sencillos se obtiene finalmente el valor

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right|.$$

628 La región de integración consiste en un cilindro recto con eje a lo largo del eje Y. Esto sugiere realizar un cambio a cilíndricas considerando las coordenadas polares en el plano XZ en vez de en el plano XY. O alternativamente, podemos intercambiar los nombres de las variables y y z y observar que el valor de la integral no cambia

$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

con $D = \{x^2 + y^2 \le 2, -2 \le z \le 3\}$. Esta integral en coordenadas cilíndricas queda

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-2}^{3} (r^2 + z^2) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Todas las integraciones involucradas ahora son inmediatas. Con un poco de paciencia, encontramos el valor final $\frac{100\pi}{3}$.

629 Si D es la región limitada por las superficies $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$, escribir y evaluar en coordenadas cilíndricas la integral:

$$\int_D (zx + y)\, dV.$$

630 Si D es la región en el espacio limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \geq 0$, escribir y evaluar la siguiente integral usando coordenadas esféricas:

$$\int_D (x + y + z)\, dV.$$

631 Calcular el valor de la integral:

$$I = \int_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$$

donde D es el recinto limitado por las desigualdades:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Solución 631:

Nótese cómo la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \leq y + z$ se puede reescribir completando cuadrados como

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, vemos claramente que la región de integración D corresponde a la intersección de la esfera sólida centrada en $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ con radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ con el primer octante $x, y, z \geq 0$.

El boceto de esta región (Figura 30) nos permite ver que al cambiar a coordenadas esféricas los ángulos θ y ϕ deben moverse en el rango $(0, \frac{\pi}{2})$ mientras que el radio ρ debe limitarse precisamente por la ecuación de la cáscara de la esfera anterior. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = y + z$ en coordenadas esféricas es $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\phi$. En consecuencia la región de integración D en coordenadas esféricas es

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + \cos\phi,$$

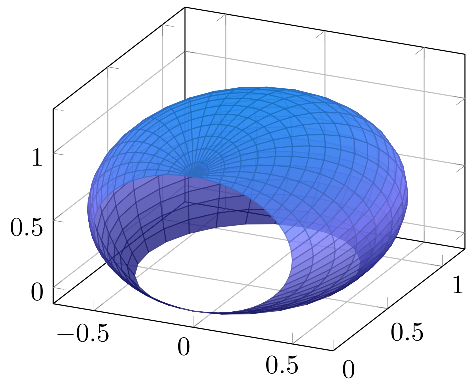


Figura 30: Ejercicio 631: esfera desplazada en el primer octante

y la integral solicitada será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi+\cos\phi} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

La integración respecto a ρ conduce a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\right) \, d\phi \, d\theta.$$

Mediante las fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1-\cos(2\phi)}{2}, \quad \operatorname{sen}\phi\cos\phi = \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2},$$

las integraciones anteriores son inmediatas. Después de unos cuantos cálculos cuidadosos se obtiene el valor final de la integral $\frac{\pi}{2}$.

632 Encontrar el volumen encerrado por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

Solución 632:

La región cuyo volumen se solicita es la intersección de las esferas de radio unitario centradas en el origen y el punto $(0, 1, 0)$, respectivamente. Si tenemos en cuenta que el corte de tales esferas tiene lugar en el plano $y = \frac{1}{2}$ y su proyección sobre el plano XZ tiene por ecuación $x^2+z^2 = \frac{3}{4}$, debido a la simetría, el volumen que buscamos será el doble del volumen del casquete

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

Debido de nuevo a la simetría, y por comodidad, podemos cambiar el nombre de las variables y calcular el volumen del casquete

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq z \leq 1.$$

En coordenadas cilíndricas, este volumen se calcula cómodamente

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Las primitivas involucradas son inmediatas mediante cambios de variable apropiados. El valor final del volumen es $\frac{5\pi}{12}$.

633 Encontrar el volumen de la región del primer octante limitada por la esfera $\rho = \alpha$, el cilindro $r = \alpha$ y el plano $z = \alpha$.

634 Calcular la integral

$$\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$$

donde V es el volumen del sólido limitado por la superficie de ecuación

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

que queda encima del plano XY.

Solución 634:

La forma de la ecuación de la superficie proporcionada sugiere el cambio de coordenadas esféricas modificado por los factores a, b y c, del siguiente modo

$$x = a\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \quad y = b\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \quad z = c\rho\cos\phi.$$

De esta manera, la superficie se convierte, después de algunas simplificaciones, en

$$\rho^2 = -\cos(2\phi).$$

Esta ecuación nos obliga a tomar el ángulo ϕ entre los límites $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ que es el rango en que $\cos(2\phi)$ es negativo, pero puesto que nos referimos sólo a la parte que queda encima del plano XY, los límites han de ser $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Nótese que ahora el jacobiano del cambio es el de las coordenadas esféricas $\rho^2\operatorname{sen}\phi$ modificado por el factor abc. La integral que debemos calcular es

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{-\cos(2\phi)}} abc\rho^3\operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = abc\frac{\pi}{24}.$$

■ Calcular el volumen determinado por la expresiones siguientes:

635 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$.

636 $x^2 + 2(y^2+z^2) \leq 10$ y $z^2+y^2 \leq 1$.

637 $x^2+y^2 \leq 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 4$.

638 $x^2+y^2 \leq \frac{1}{5}z^2$ y $0 \leq z \leq 5 + \sqrt{5-x^2-y^2}$.

639 $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $2x^2 \geq z^2+y^2$.

640 $y^2+4z^2 = 4$, $x = 0$ y $x = y+2$.

Solución:

638 La región cuyo volumen debemos calcular es la representada en la Figura 31. En coordenadas polares tendremos que dicho volumen se calcula mediante la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} \left(5 + \sqrt{5-r^2} - \sqrt{5}r\right) r\, dr\, d\theta.$$

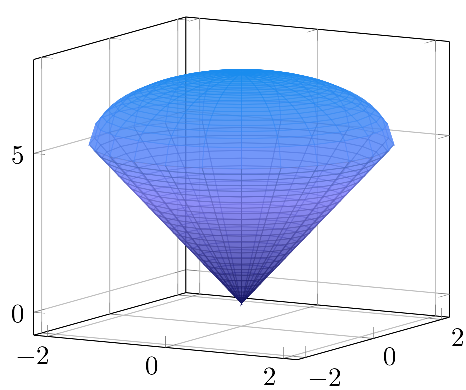


Figura 31: Gráfica del Ejercicio 638

Las primitivas involucradas son fáciles y unos cuantos cálculos conducen al resultado final

$$\frac{10\pi}{3}\left(\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right).$$

640 La región cuyo volumen se debe encontrar está dibujada en el boceto que acompaña (Figura 32). En coordenadas rectangulares,

este volumen viene dado por la integral doble

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}}\int_{0}^{y+2} dx\,dz\,dy.$$

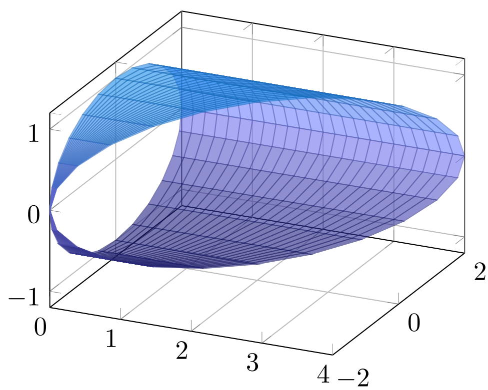


Figura 32: Representación gráfica del Ejercicio 640

Estas integraciones no son inmediatas en absoluto de modo que intentamos calcular el volumen en un sistema de coordenadas distinto. En este caso, lo más idóneo es usar coordenadas cilíndricas modificadas por un factor 2 para y, cambiando x por z, esto es,0

$$x = x, \quad y = 2r\cos\theta, z = r\,\text{sen}\,\theta$$

y por tanto, el volumen vendrá dado por la integral

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2+2r\,\text{sen}\,\theta} 2r\,dx\,dr\,d\theta.$$

Nótese que el jacobiano ahora es $2r$. Después de algunos cálculos sencillos, el resultado final es 4π.

641 Calcular la integral

$$I = \int_R \frac{z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dV$$

donde R es la región determinada por las desigualdades

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$$

642 Encuentra el volumen encerrado por las superficies $x^2 + y^2 + z = 1$ y $x^2 + (y-1)^2 - z = 0$.

Solución 642:

Se trata de encontrar el volumen encerrado por los dos paraboloides de la Figura 33.

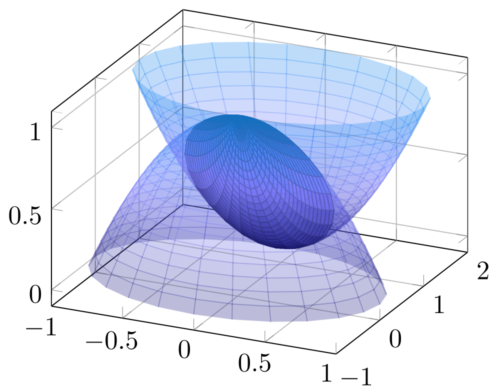


Figura 33: Gráfica del Ejercicio 642

La proyección de dicha intersección sobre el plano XY tendrá por ecuación

$$1 - x^2 - y^2 = x^2 + (y-1)^2.$$

Después de algunos cálculos y completar cuadrados, esta ecuación se convierte en

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

que es el círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $(0, \frac{1}{2})$. En coordenadas cilíndricas la integral queda

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \int_{r^2-2r\operatorname{sen}\theta+1}^{1-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Las dos primeras integrales son sencillas y desembocan en la integral

$$\frac{1}{6} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta.$$

Mediante la fórmula del ángulo doble, usada dos veces consecutivas, obtenemos que

$$\operatorname{sen}^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta),$$

y por tanto la integral anterior se calcula de manera directa y vale $\frac{\pi}{16}$.

643 Hallar el volumen de la región

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}.$$

644 Calcular el volumen encerrado por las dos superficies $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$, y $z = x$.

■ Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas polares:

645 $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\sqrt{9 - r^2}\, dr\, d\theta.$

646 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{1} r^3\, dr\, d\theta.$

647 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{-\cos\theta} r \tan\theta\, dr\, d\theta.$

Solución 647:

La región de integración corresponde a

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq -\cos\theta.$$

La ecuación $r = -\cos\theta$ corresponde, en coordenadas cartesianas a

$$x^2 + y^2 + x = 0,$$

que, después de completar cuadrados, vemos que se trata del círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $(-\frac{1}{2}, 0)$. Los límites para el ángulo nos informan de que sólo una parte de tal círculo es la región de integración. En concreto se trata de la parte $y \geq -x$ sobre la diagonal secundaria. Así, la región de integración se describe en cartesianas como

$$x^2 + y^2 + x \leq 0, \quad y + x \geq 0.$$

El integrando corresponde a $\tan\theta$ (después de "descontar" el jacobiano r). Dicha función en cartesianas corresponde a $\frac{y}{x}$. Finalmente las soluciones del sistema

$$x^2 + y^2 + x = 0, \quad y + x = 0,$$

nos dan los límites de integración para la variable x. En definitiva encontramos que se trata de la integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{-x-x^2}} \frac{y}{x}\, dy\, dx.$$

■ Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas cilíndricas:

648 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{r^2} zr^2 \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta.$

649 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\cos\theta}} \int_0^{r} r^2\, dz\, dr\, d\theta.$

650 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{|2\operatorname{sen}\theta|} \int_0^{1} r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, dz\, dr\, d\theta.$

Solución 649:

El integrando corresponde a $r = \sqrt{x^2+y^2}$ después de descontar el jacobiano del cambio. Los límites de integración para z son claramente $0 \leq z \leq r = \sqrt{x^2+y^2}$. El punto más delicado consiste en hacerse una idea de la curva $r = \sqrt{\cos\theta}$. Lo que está claro es que se trata de una curva cerrada en el semiplano derecho $x \geq 0$ contenida en la banda $0 \leq x \leq 1$. Esto nos lleva a concluir que los límites para x son $0 \leq x \leq 1$. Para determinar los límites para la variable y, debemos transformar la ecuación $r = \sqrt{\cos\theta}$ a cartesianas. Elevando al cuadrado y multiplicando por r, no es difícil llegar a $(x^2+y^2)^3 = x^2$. Si despejamos y, tendremos

$$-\sqrt{x^{2/3}-x^2} \leq y \leq \sqrt{x^{2/3}-x^2}.$$

La integral completa en cartesianas será por tanto

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x^{2/3}-x^2}}^{\sqrt{x^{2/3}-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx.$$

■ Escribir en cartesianas (sin evaluar) las siguientes integrales expresadas en coordenadas esféricas.

651 $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$

652 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\phi} \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$

$\boxed{\mathbf{653}}$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho^3 \operatorname{sen}(2\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$

Solución 652:

Después de descontar el jacobiano del cambio a esféricas $\rho^2 \operatorname{sen}\phi$, el integrando queda $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ que en coordenadas cartesianas se puede escribir como $x^2 + y^2$.

Para determinar la región de integración, debemos aclarar qué figura representa $\rho = 2\cos\phi$. Si multiplicamos por ρ, deducimos que se trata de $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y completando cuadrados llegamos a

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Es por tanto la esfera de radio unitario centrada en $(0, 0, 1)$. Los límites $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ indican que sólo consideramos la parte de dicha esfera sobre el cono $\phi = \frac{\pi}{4}$, mientras que los límites $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ indican que únicamente la parte de la región con $x \geq 0$ nos interesa. El cono $\phi = \frac{\pi}{4}$ corresponde a la ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Así pues la intersección de dicho cono con la esfera de antes corresponde al círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Finalmente la integral en coordenadas cartesianas será

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right)\, dz\, dx\, dy.$$

Nótese que los límites para x e y provienen de la descripción de la región plana $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$. Los límites para z surgen del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, despejando z en ambos casos.

Capítulo 5

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Los ejercicios propuestos en este tema estarán dedicados al estudio de curvas y superficies, que serán esenciales en el tema siguiente. Al igual que en el tema anterior, la dificultad fundamental reside en la correcta comprensión y visualización de estos objetos, con especial atención al cálculo de parametrizaciones.

5 1 CURVAS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

■ Esbozar las curvas siguientes indicando el sentido en el que se recorren:

654 $\sigma(t) = (0, \cos(\pi t))$, $t \in [-1, \frac{1}{3}]$.

655 $\sigma(t) = (2t-1, t-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

656 $\sigma(t) = (t^2, -t)$, $t \geq 0$.

657 $\sigma(t) = (2\cos t, -\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

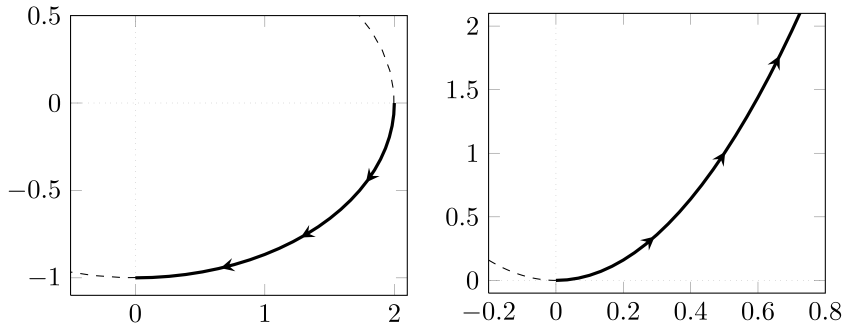
658 $\sigma(t) = (e^t, 4e^{2t})$, $t \in \mathbb{R}$.

659 $\sigma(t) = (\sec t, \tan t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solución:

657 Atendiendo a las coordenadas polares dilatadas, podemos fácilmente deducir que la curva $(2\cos t, -\operatorname{sen} t)$ corresponde a un cuarto de la elipse de centro el origen y semiejes 2 y 1. El origen está en el punto $(2, 0)$ y el extremo final en el punto $(0, -1)$, recorrida en sentido negativo (ver Figura 5.1(a)).

658 Está claro que la curva satisface $y = 4x^2$, por lo que corresponde a un trozo de dicha parábola. Teniendo en cuenta que si $t \to -\infty$, entonces $e^t \to 0$, se trata de la rama derecha de la parábola $y = x^2$ sin incluir al origen (ver Figura 5.1(b)) recorrida hacia arriba.



(a) Ejercicio 657 (b) Ejercicio 658

Figura 1: Curvas parametrizadas

■ Encontrar una parametrización para las curvas planas descritas a continuación:

660 El segmento que une los puntos $(-3,2)$ y $(4,0)$.

661 El círculo con centro el origen y radio 6.

662 El cuarto de círculo con centro en $(0,0)$ cuyos puntos extremos son $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

663 El grafo de $y=\tan x$ para $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

664 El cuadrado de vértices $(3,0)$, $(3,3)$, $(0,3)$ y $(0,0)$.

665 La rama izquierda de la hipérbola $2x^2-3y^2=1$.

Solución:

662 Se trata de un cuarto del círculo unitario centrado en el origen. La única precaución se refiere a delimitar bien el rango en el que se debe mover el parámetro que representa el ángulo. Una parametrización puede ser

$$\sigma(\theta)=(\cos\theta,-\operatorname{sen}\theta)\,,\quad \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

664 Como el cuadrado que nos solicitan consta de cuatro segmentos rectos, una posibilidad consiste en parametrizar esos cuatro lados de manera independiente. Así tendríamos

$$\sigma(t)=(3t,0),\quad t\in[0,1]\quad\text{para el primer segmento,}$$
$$\sigma(t)=(3,3t-3),\quad t\in[1,2]\quad\text{para el segundo segmento,}$$

$$\sigma(t) = (9-3t, 3), \quad t \in [2,3] \quad \text{para el tercer segmento,}$$
$$\sigma(t) = (0, 12-3t), \quad t \in [3,4] \quad \text{para el último segmento.}$$

Dejamos al lector comprobar que una parametrización más compacta se puede dar mediante

$$\sigma(t) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{\text{máx}(|\cos t|, |\operatorname{sen} t|)}(\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi].$$

666 Probar que la función $\sigma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, es una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = 1$ excepto un punto, que habrá que determinar.

Solución 666:

Se trata de comprobar en primer lugar que si ponemos

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2},$$

entonces se tiene que $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, lo que significa que la imagen de $\sigma(t)$ está contenida en el círculo unitario para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es una comprobación inmediata. En segundo lugar debemos determinar si todos los puntos del citado círculo se alcanzan. Para ello suponemos dado un punto (x, y) de tal círculo e intentamos determinar el valor del parámetro t para que se tenga

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = x, \quad \frac{2t}{1+t^2} = y.$$

Determinar el valor de t significa en este caso despejar t de las dos ecuaciones anteriores. De la primera ecuación obtenemos

$$t^2 = \frac{1-x}{1+x},$$

de donde concluimos que cuando $x = -1$, y por tanto $y = 0$, no podremos encontrar el valor apropiado de t. Obsérvese que cuando $y = 0$, $t = 0$ y $x = 1$. En consecuencia el punto $(-1, 0)$ no se encuentra contenido en la parametrización dada.

667 Probar que la curvatura de la parábola $y = x^2$ es máxima en el vértice.

Solución 667:

Si parametrizamos la parábola como $\sigma(t) = (t, t^2)$, con $\in \mathbb{R}$, es evidente que el vértice corresponde al valor $\sigma(0)$. Calculemos la curvatura de esta curva plana. El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

y dado que tenemos una curva plana, el vector normal unitario es inmediato:

$$\mathbf{N}(t) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}},\right)$$

Entonces, la curvatura $\kappa(t)$ viene dada por:

$$\kappa(t) = \mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{N}(t) = \frac{2}{1+4t^2}$$

Ahora es fácil darse cuenta que la función $\kappa(t)$ tiene un máximo en $t = 0$.

■ Determinar el vector tangente unitario, el vector normal principal y el vector binormal de las siguientes curvas en los puntos dados:

668 $\sigma(t) = (t, t^2, t^2+3)$ en el punto $(1, 1, 4)$.

669 $\sigma(t) = (\cos t, \tan t, \operatorname{sen} t)$ en el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

670 $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Solución 669:

Los vectores tangente unitario, normal principal y binormal de una curva en el espacio vienen dados por:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\sigma'(t) \times \sigma''(t)}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|},$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{[\sigma'(t) \times \sigma''(t)] \times \sigma'(t)}{\|[\sigma'(t) \times \sigma''(t)] \times \sigma'(t)\|}.$$

Puesto que el punto dado corresponde al valor del parámetro $t = \frac{\pi}{4}$, es fácil obtener:

$$\mathbf{T} = \left(-\tfrac{\sqrt{10}}{10}, \tfrac{2\sqrt{5}}{5}, \tfrac{\sqrt{10}}{10}\right), \quad \mathbf{N} = \left(-\tfrac{\sqrt{42}}{7}, -\tfrac{\sqrt{21}}{21}, -\tfrac{\sqrt{42}}{21}\right),$$

$$\mathbf{B} = \left(-\tfrac{\sqrt{210}}{70}, -\tfrac{4\sqrt{105}}{105}, \tfrac{13\sqrt{210}}{210}\right).$$

■ Encontrar la ecuación de la tangente a las siguientes curvas paramétricas en el punto correspondiente al valor de t dado:

671 $\sigma(t) = (2t^2+1, 3t^3+2)$, $t = 1$.

672 $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t = \frac{\pi}{4}$.

673 $\sigma(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t)$, $t = \frac{\pi}{2}$.

674 $\sigma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, $t = 1$.

■ Determinar la curvatura de las siguientes curvas:

675 $\sigma(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t)$.

676 La curva $y = \sqrt{x}$.

677 $\sigma(t) = (2 + t, 1 + t^2, 3t + t^2)$

678 La curva intersección del plano $2x + z = 3$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución 677:

Para una curva $\sigma(t)$ en el espacio, la curvatura viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}.$$

Un simple cálculo nos lleva a $\sigma'(t) = (1, 2t, 3 + 2t)$ y $\sigma''(t) = (0, 2, 2)$, luego

$$\sigma'(t) \times \sigma''(t) = (-6, -2, 2), \quad \kappa(t) = \frac{\sqrt{44}}{(10 + 12t + 8t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5 2

LONGITUD DE ARCO

■ Calcular las longitudes de arco para las curvas siguientes:

679 $\sigma(t) = (\cos t, \frac{3}{5} \operatorname{sen} t, -\frac{4}{5} \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

680 $\sigma(t) = (2t, t^2, \log t)$, $t > 0$, entre $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

681 $\sigma(t) = (a(\cos t + t \operatorname{sen} t), a(\operatorname{sen} t - t \cos t))$, $t \in [-\pi, \pi]$.

682 $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

683 $\sigma(t) = (2(t^2 - 1)^{3/2}, 3t^2, 3t^2)$, $t \in [0, \sqrt{8}]$.

684 $\sigma(t) = (\log(\cos t), t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

685 $\sigma(t) = (3t \operatorname{sen} t, 3t \cos t, 2t^2)$, $t \in [0, \frac{4}{5}]$.

Solución:

680 Es bien conocido que la fórmula del arco de longitud de una curva con parametrización

$$\sigma(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

viene dada por la integral definida

$$L = \int_{t_0}^{t_1} |\sigma'(t)| \, dt.$$

En este caso concreto, tendremos que

$$\sigma'(t) = (2, 2t, \tfrac{1}{t}), \quad t \in [1, 2].$$

La longitud solicitada será por tanto

$$L = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} \, dt.$$

Después de unos cuantos cálculos, y completando cuadrados llegamos a

$$L = \int_1^2 \frac{2t^2 + 1}{t} \, dt = \left[t^2 + \log t\right]_1^2 = 3 + \log 2.$$

685 En este ejemplo el vector tangente es

$$\sigma'(t) = (3 \operatorname{sen} t + 3t \cos t, 3 \cos t - 3t \operatorname{sen} t, 4t),$$

de modo que su longitud después de desarrollar los cuadrados y tener en cuenta alguna cancelación, resulta ser

$$|\sigma'(t)|^2 = 9 + 25t^2.$$

Por tanto, la longitud de arco nos lleva a preocuparnos por calcular la integral definida

$$L = \int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt{9 + 25t^2} \, dt.$$

Esta integral se puede calcular mediante el cambio $t = \operatorname{senh} x$, y resultado final es $2 + \frac{9}{10} \operatorname{arccosh}\left(\frac{4}{3}\right)$

■ Encontrar la longitud de arco de las siguientes curvas expresadas en forma polar:

686 $r = \cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

687 $r = \theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

688 $r = \theta^2$, $\theta \in [0, 1]$.

689 $r = \sec\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Solución 688:

La fórmula de la longitud de arco de una curva dada en polares

$$r = r(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,$$

es

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}\, d\theta.$$

Esta fórmula proviene de que para una tal curva, una posible parametrización es

$$\sigma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

Si aplicamos la fórmula usual de la longitud de arco para una curva con esta parametrización, obtenemos la integral anterior.

En este ejemplo, la longitud se calcula a través de la integral

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta.$$

Factorizando y sacando del radical θ^2, llegamos a la integral

$$\int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4 + \theta^2}\, d\theta.$$

Esta integral es inmediata obteniéndose

$$L = \frac{1}{3}\left(4 + \theta^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\left[\left(1 + \pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

5 3

SUPERFICIES

690 Encontrar una expresión para el vector normal a la superficie de parametrización:

$$x = (2 - \cos v)\cos u,\ y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u,\ z = \operatorname{sen} v,$$
$$-\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi.$$

¿Es suave esta superficie? Intentar esbozarla.

■ Encontrar la ecuación del plano tangente a las superficies siguientes en los puntos dados:

691 $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$, para $u = v = 1$.

692 $x = u^2$, $y = u\,\mathrm{sen}(e^v)$, $z = \frac{1}{3}u\cos(e^v)$, en $(13, -2, 1)$.

693 $z = 3x^2 + 8xy$, para $x = 1$, $y = 0$.

694 $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, en $(1, \frac{1}{3}, 0)$.

Solución:

692 Cuando disponemos de una parametrización de la superficie

$$(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

la ecuación del plano tangente en un punto concreto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$$

viene dada por la expresión

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

donde los vectores de derivadas parciales se evalúan para los valores (u_0, v_0). En nuestro caso los valores de los parámetros que nos dan el punto $(13, -2, 1)$ son

$$u_0 = \sqrt{13}, \quad v_0 = \log\left(\mathrm{arc\,sen}\,\frac{-2}{\sqrt{13}}\right),$$

y los vectores de derivadas parciales en dichos valores de los parámetros son

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(0, 3\,\mathrm{arc\,sen}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right), \frac{2}{3}\,\mathrm{arc\,sen}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\right).$$

La ecuación del plano tangente será por tanto

$$\det\begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\[2ex] 0 & 3\,\mathrm{arc\,sen}(-\frac{2}{\sqrt{13}}) & \frac{2}{3}\,\mathrm{arc\,sen}(-\frac{2}{\sqrt{13}}) \\[2ex] x - 13 & y + 2 & z - 1 \end{pmatrix} = 0$$

que da lugar a $-x - 4y + 18z = 13$.

694 Si la superficie está determinada a través de una ecuación del tipo $f(x,y,z)=0$ la ecuación del plano tangente en un punto de la misma (x_0,y_0,z_0) (que debe por tanto verificar $f(x_0,y_0,z_0)=0$) viene dada por la expresión

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0.$$

En el ejemplo que nos ocupa será

$$(4,3,0)\cdot(x-1,y-\tfrac{1}{3},z)=0,$$

es decir

$$4x+3y=5.$$

695 Calcular el área de la superficie dada por la parametrización

$$x=r\cos\theta,\ y=2r\cos\theta,\ z=\theta,\quad 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,$$

y esbozarla.

696 Encontrar el área de la esfera unitaria usando la parametrización

$$x=\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\ y=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\ z=\cos\phi,$$
$$0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\phi\le\pi.$$

697 Si $\Phi(u,v)=(u-v,u+v,uv)$ para $(u,v)\in D=\{u^2+v^2\le 1\}$, encontrar el área de $\Phi(D)$ e intentar esbozar esta superficie.

Solución 697:

La fórmula para encontrar el área de una superficie parametrizada

$$\Phi(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

es

$$A=\int_D|\Phi_u\times\Phi_v|\,dx.$$

En este caso concreto tendremos

$$\Phi_u=(1,1,v),\quad \Phi_v=(-1,1,u),$$
$$\Phi_u\times\Phi_v=(u-v,-u-v,2),\quad |\Phi_u\times\Phi_v|=\sqrt{4+2u^2+2v^2},$$

y en consecuencia

$$A=\int_{\{u^2+v^2\le 1\}}\sqrt{4+2u^2+2v^2}\,du\,dv.$$

Por el integrando y por la región de integración, el cambio a coordenadas polares permite encontrar esta integral de modo fácil. En efecto

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4+2r^2}r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{3}(6\sqrt{6}-8).$$

Dicha superficie está esbozada en la Figura 2 y corresponde a un paraboloide hiperbólico de ecuación $4z = y^2 - x^2$ sobre $\{x^2+y^2 \leq 2\}$, sin más que tener en cuenta que $x = u - v$, $y = u + v$, por lo que $z = uv = \frac{1}{4}(y^2 - x^2)$.

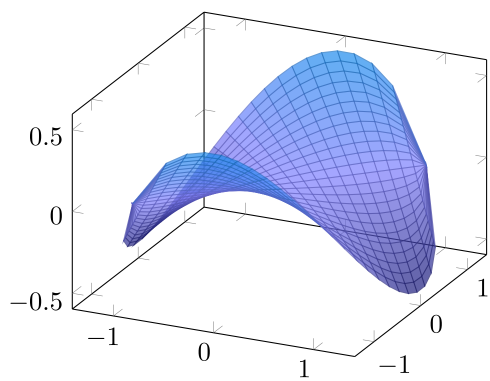


Figura 2: Gráfica del Ejercicio 697

698 Encontrar el área del toro cuya parametrización es

$$\Phi(\varphi,\psi) = ((R+\cos\psi)\cos\varphi, (R+\cos\psi)\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\psi),$$

para $\psi, \varphi \in [0, 2\pi]$, con $R \geq 1$.

Solución 698:

Por la fórmula del área de una superficie parametrizada encontramos en el caso del toro, después de algunos cálculos cuidadosos,

$$\Phi_\varphi = (-(R+\cos\psi)\operatorname{sen}\varphi, (R+\cos\psi)\cos\varphi, 0)\,,$$

$$\Phi_\psi = (-\cos\varphi\operatorname{sen}\psi, -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi, \cos\psi)\,,$$

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\psi = (R+\cos\psi)(\cos\varphi\cos\psi, \operatorname{sen}\varphi\cos\psi, \operatorname{sen}\psi)\,,$$

$$|\Phi_\varphi \times \Phi_\psi| = |R+\cos\psi| = R+\cos\psi, \text{ pues } R \geq 1,$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R+\cos\psi)\,d\psi\,d\varphi = 4\pi^2 R.$$

■ Encontrar una parametrización para las siguientes superficies:

699 Porción del hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$, que se encuentra bajo el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, 3]$.

700 Porción de $z = x + 3$ que se encuentra dentro de $x^2 + y^2 = 1$.

701 Porción de $x^2 + z^2 + 2z = 0$ comprendida entre $y = -1$ e $y = 3$.

702 Superficie de $4 - z = x^2 + y^2$ limitada por $y + z = 4$.

703 Porción de superficie $y = 4x + z^2$ comprendida entre $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.

704 Mitad superior del elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

705 Porción de $y = 3 - 3x^2 - 2z^2$ situado a la derecha del plano XZ.

706 Porción de $x + y^2 + 2z^2 = 4$ situado frente al plano $x = 0$.

707 De la esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio a comprendida en una hoja del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución:

701 La ecuación $x^2 + z^2 + 2z = 1$ reorganizada completando cuadrados se convierte en $x^2 + (z + 1)^2 = 1$. En esta forma vemos que se trata de un círculo en el plano XZ con centro en $(0, -1)$ y radio 1. Como la variable y no interviene en esta ecuación, trasladamos este círculo paralelamente al eje Y y obtenemos así un cilindro entre los planos $y = -1$ e $y = 3$. La parametrización más natural será por tanto

$$x(u, v) = \cos u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = -1 + \operatorname{sen} u,$$
$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 3].$$

702 La superficie de ecuación $4-z = x^2+y^2$ es un paraboloide invertido mientras que $y + z = 4$ es un plano (ver Figura 3). La superficie que nos piden parametrizar es la parte del citado paraboloide por encima del plano. Veamos cuál es la intersección de ambas superficies. Eliminando z de las dos ecuaciones, obtendremos la proyección de dicha intersección sobre el plano XY. Así se llega a la ecuación

$$y + (4 - x^2 - y^2) = 4.$$

Después de cancelar, agrupar y completar cuadrados, obtenemos

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

El modo más fácil de parametrizar la superficie es interpretarla como el grafo de $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el círculo anterior. De este modo ponemos

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = (\tfrac{1}{2} + v\,\mathrm{sen}\,u),$$
$$z(u,v) = \tfrac{15}{4} - v^2 - v\,\mathrm{sen}\,u, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\tfrac{1}{2}].$$

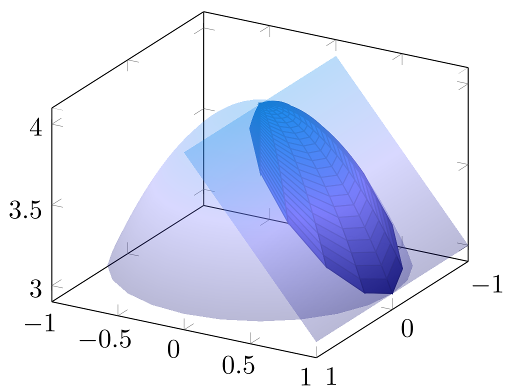


Figura 3: Ejercicio 702: paraboloide limitado por plano

705 En primer lugar encontramos el corte de la superficie de ecuación $y = 3 - 3x^2 - 2z^2$ con el plano XZ que tiene ecuación $y = 0$. Tal intersección es la elipse

$$x^2 + \frac{2}{3}z^2 = 1.$$

La parte de la superficie que queda a la derecha del plano XZ corresponde al interior de dicha elipse. En consecuencia podemos parametrizar la superficie que nos solicitan considerándola como la parte del grafo de $y = 3 - 3x^2 - 2z^2$ "sobre" el interior de la elipse anterior. Es decir

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = 3(1 - v^2),$$
$$z(u,v) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}v\,\mathrm{sen}\,u, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1].$$

707 La ecuación de la esfera es $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$. De esta suerte, el corte con el cono $z^2 = x^2 + y^2$ proyectado sobre el plano XY tendrá ecuación, después de eliminar la variable z y completar cuadrados,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

que es el círculo de radio $\frac{a}{2}$ centrado en el punto $(\frac{a}{2}, 0)$. La superficie que nos piden podríamos parametrizarla mediante la parte del grafo de

$$z = \sqrt{a^2 - (x-a)^2 - y^2}$$

sobre el interior de la circunferencia anterior, resultando

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2ar\cos\theta - r^2}),$$
$$\theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad r \in [0, a\cos\theta];$$

Pero es quizás más cómodo usar las coordenadas esféricas del siguiente modo. Puesto que se trata de una porción de la esfera inicial, sabemos que la parametrización será

$$x(u,v) = a + a\cos u \operatorname{sen} v, \quad y(u,v) = a\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z(u,v) = a\cos v.$$

Lo importante en este caso es determinar la región en la que deben moverse los parámetros (u, v) para que las coordenadas esféricas sólo nos describan la parte de la esfera determinada por el corte del cono $z^2 = x^2 + y^2$. En primer lugar observamos que el ángulo u debe barrer el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Pero el ángulo v debe barrer un intervalo que depende del valor de u considerado. Examinando la Figura 4 con cuidado llegamos a la conclusión de que v varía entre 0 y el ángulo producido en la intersección del cono con la esfera. Si parametrizamos la curva intersección en función de u, observamos que su proyección es $(-a\cos^2 u, -a\cos u \operatorname{sen} u)$ y por tanto la curva corresponde a

$$(-a\cos^2 u, -a\cos u \operatorname{sen} u, a|\cos u|).$$

De este modo es fácil encontrar que si $u \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ entonces $v \in [0, u - \frac{\pi}{2}]$, mientras que si $u \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $v \in [0, \frac{3\pi}{2} - u]$. De forma más compacta podemos poner

$$\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{3\pi}{2} \quad 0 \le v \le \frac{\pi}{2} - |u - \pi|.$$

708 Se considera la figura en el plano XZ formada por la curva $z = 1 - |x|$ y el arco de parábola $z = \frac{1-x^2}{2}$. Sea S la superficie cerrada engendrada al girar dicha figura alrededor del eje Z. Encontrar una parametrización para dicha superficie.

Solución 708:

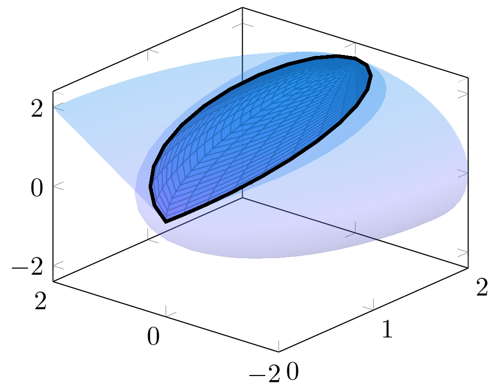
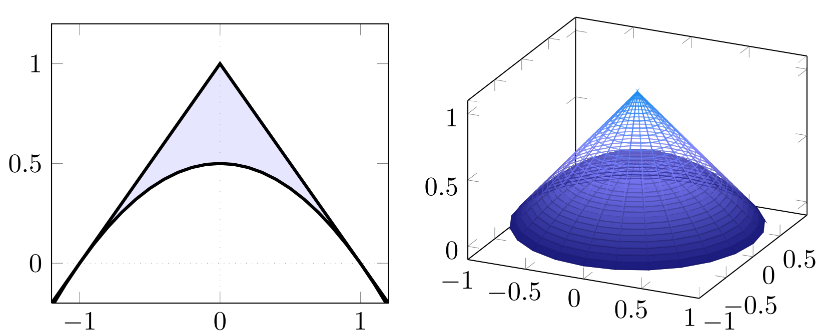


Figura 4: Gráfica del Ejercicio 707 para $a = 2$

Puesto que se trata de una superficie de revolución podemos usar la parametrización genérica para este tipo de superficies. Sabemos que para una curva en el plano XZ de la forma $(f(u), g(u))$, la parametrización de la superficie de revolución alrededor del eje Z es

$$\Phi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\,\mathrm{sen}\, v, g(u)).$$



(a) (b)

Figura 5: Ejercicio 708

Atendiendo a la gráfica (ver Figura 5.5(a)) es claro que sólo es necesario revolucionar la parte correspondiente a $x \geq 0$. La curva será $(t, 1-t)$, con $t \in [0, 1]$ y $(t, \frac{1-t^2}{2})$, con $t \in [0, 1]$, luego la parametrización vendrá en

dos partes:

$$\Phi_1(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, (1-u)), \quad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]$$
$$\Phi_2(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, \tfrac{1-u^2}{2}), \quad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi]$$

709 Encontrar el área de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ encerrada por el cilindro $x^2+y^2=x$. Esbozar la figura. (Indicación: usar coordenadas cilíndricas).

■ Hallar el área de las superficies siguientes:

710 Porción de $z = x+y^2$ que se encuentra encima del triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,0)$.

711 Porción de $x+2y+z=4$ en el interior de $x^2+y^2=4$.

712 Porción de $z=x^2-y^2$ entre $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

713 De la superficie $x^2+y^2-4z^2=0$ limitada por $x^2+y^2-4x=0$.

714 Superficie del cilindro $x^2+y^2=1$ limitada por $0 \le y \le z \le 2y$.

715 Del cilindro $x^2+y^2=2x$ limitado por $z=0$ y $x^2+y^2=z^2$.

716 De la superficie cilíndrica $x^2+y^2=ay$ limitada por la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $a>0$.

717 Del elipsoide $x^2+y^2+2z^2=3$.

718 De la porción de esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ situada en el interior del cono $x^2+y^2=z^2$.

719 Porción de $x=y^2+z^2$ en el interior de $y^2+z^2=9$.

Solución:

710 Podemos describir la superficie que nos dan como una parte del grafo de la función $z = x+y^2$. De esta manera, el área que nos piden vendrá dada por la integral doble

$$A = \int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dy\,dx,$$

donde D es la región en la que se mueven las variables (x,y). Nótese que esta fórmula corresponde al área de la superficie parametrizada por $(x,y,z(x,y))$. En nuestro caso concreto tenemos que D es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,0)$. Las variables (x,y) describen este triángulo si

$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y.$$

Así el área será

$$A = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2+4y^2}\,dx\,dy = \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6}.$$

La integral queda mucho más complicada si en el momento de describir el triángulo se usa el otro orden de integración.

713 Usamos las coordenadas cilíndricas centradas en el origen, de modo que

$$x(u,v) = v\cos u, \quad y(u,v) = v\,\mathrm{sen}\,u, \quad z(u,v) = \tfrac{v}{2},$$

donde hemos tenido en cuenta que $z^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$ es $z = \frac{v}{2}$ en coordenadas cilíndricas. Lo importante ahora es determinar apropiadamente la región en la que se deben mover los parámetros (u,v). Está región viene determinada por el interior de la curva de ecuación $x^2+y^2-4x=0$. En coordenadas cilíndricas, esta curva es $v = 4\cos u$. Como se trata de un círculo, concluimos que los parámetros se deben mover en la región

$$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 4\cos u.$$

Necesitamos además la norma

$$|(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)| = \frac{\sqrt{5}v}{2}.$$

Finalmente, el área viene dada por la integral

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos u} \frac{\sqrt{5}v}{2}\,dv\,du.$$

Después de unos cuantos cálculos obtenemos el valor de dicha integral $2\sqrt{5}\pi$.

716 Para la descripción de la porción de cilindro que se nos pide (ver Figura 6), está claro que la proyección de la figura sobre el plano XY corresponde a la circunferencia que genera el cilindro cuya ecuación en polares es $r = a\,\mathrm{sen}\,\theta$. De este modo llegamos a la parametrización

$$\Phi(z,\theta) = (a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta, a\,\mathrm{sen}^2\theta, z),\ \theta\in[0,\pi],\ z\in[0,a|\cos\theta|]$$

donde debido a la simetría sólo hemos incorporado la parte de la superficie para $z \ge 0$. La longitud del vector normal

$$\mathbf{n}(z,\theta) = (a\,\mathrm{sen}(2\theta), -a\cos(2\theta), 0),$$

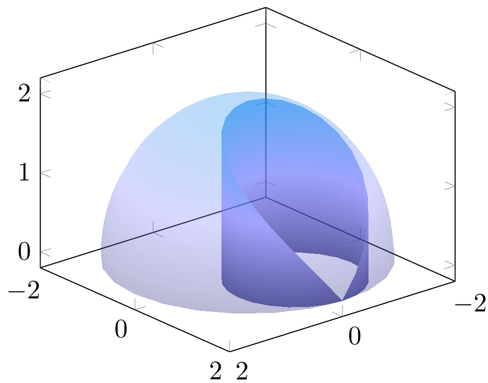


Figura 6: Superficie del Ejercicio 716

que es el integrando para calcular el área, es a. Por tanto

$$A = 2\int_0^{\pi}\int_0^{a|\cos\theta|} a\,dz\,d\theta = 4a^2.$$

719 La superficie corresponde a un paraboloide circular de eje X limitado por un cilindro del mismo eje. Lo más apropiado es usar coordenadas cilíndricas cambiando z por x, esto es

$$x(u,v) = v^2, \quad y(u,v) = v\operatorname{sen} u, \quad z(u,v) = v\cos u,$$
$$0 \le v \le 3, \quad 0 \le u \le 2\pi.$$

Así, después de unos cálculos sencillos, llegamos a que

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 v\sqrt{1+4v^2}\,dv\,du = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right).$$

Capítulo

6

ANÁLISIS VECTORIAL

Dedicamos los ejercicios del último tema a estudiar los tres resultados clásicos del análisis de funciones de varias variables: los teoremas de Green, Gauss y Stokes. Estos resultados relacionan la integración de campos vectoriales sobre curvas o superficies del plano o el espacio, con la integración, en regiones de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, de ciertas "derivadas" de los campos anteriores. Así pues, dedicaremos unas secciones al cálculo de integrales de línea y superficie, una vez visto en el capítulo anterior cómo parametrizar estos objetos, y veremos su uso en estos resultados. Un par de secciones adicionales tratarán también con el uso de potenciales escalares y vectoriales para el cálculo de integrales de línea y superficie, respectivamente.

6 1 CAMPOS VECTORIALES. POTENCIALES ESCALARES

■ Encontrar el rotacional y la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

720 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, yz^2, zx^2)$.

721 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z, 0, -x^2yz)$.

722 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^y, -ze^{-y}, y\log z)$.

723 $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{xyz}, \operatorname{sen}(x-y), \frac{xy}{z}\right)$.

Solución 722:

Encontrar el rotacional y la divergencia de un campo $\mathbf{F}$ supone realizar unas cuantas derivadas parciales y su cálculo no debe plantear mayores dificultades. En concreto, se tiene

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Para el caso concreto en que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xe^y, -ze^{-y}, y \log z\right),$$

tendremos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = e^y + ze^{-y} + \frac{y}{z},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (e^{-y} \log z, 0, -xe^y).$$

724 Demostrar que cualquier campo vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z)),$$

donde f, g y h son funciones diferenciables, es irrotacional.

■ Si f es una función escalar de tres variables y $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ campos vectoriales tridimensionales, probar las siguientes identidades:

725 $\operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

726 $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

727 $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$.

728 $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

729 $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$.

Solución 728:

Las identidades involucrando varios campos y los operadores rotacional y divergencia se comprueban realizando las derivaciones indicadas (teniendo en cuenta la regla del producto) y reagrupando términos de modo conveniente. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \operatorname{div}\,(F_2G_3 - F_3G_2, F_3G_1 - F_1G_3, F_1G_2 - F_2G_1) \\
&= \frac{\partial\,(F_2G_3 - F_3G_2)}{\partial x} + \frac{\partial\,(F_3G_1 - F_1G_3)}{\partial y} + \frac{\partial\,(F_1G_2 - F_2G_1)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$= F_1\left(\frac{\partial G_2}{\partial z}-\frac{\partial G_3}{\partial y}\right)+F_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x}-\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)+F_3\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}-\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)$$
$$-G_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)-G_2\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)-G_3\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$
$$= \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})-\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}).$$

■ Sea $\mathbf{F}=(x,y,z)$ y $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ un vector constante. Probar:

730 div $(\mathbf{a}\times\mathbf{F})=0$.

731 $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{F})=2\mathbf{a}$.

732 div $((\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})\mathbf{a})=2\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}$.

733 $\nabla\times((\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})\mathbf{a})=2(\mathbf{F}\times\mathbf{a})$.

Solución 733:

Se trata de realizar las derivadas con un poco de cuidado. Obsérvese que si $\mathbf{F}=(x,y,z)$, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}=x^2+y^2+z^2=r^2$. De este modo

$$\nabla\times(r^2a)=$$
$$=\left(\frac{\partial(r^2a_3)}{\partial y}-\frac{\partial(r^2a_2)}{\partial z},\frac{\partial(r^2a_1)}{\partial z}-\frac{\partial(r^2a_3)}{\partial x},\frac{\partial(r^2a_2)}{\partial x}-\frac{\partial(r^2a_1)}{\partial y}\right)$$
$$=(2ya_3-2za_2,2za_1-2xa_3,2xa_2-2ya_1)=2(\mathbf{F}\times a).$$

■ Averiguar si los siguientes campos vectoriales son gradientes y encontrar un potencial escalar en caso afirmativo:

734 $\mathbf{F}=(2x+y^2,x^2+2y)$.

735 $\mathbf{F}=(y\cos x,\operatorname{sen}x)$.

736 $\mathbf{F}=(3x+5y,5x-2y)$.

737 $\mathbf{F}=(\sqrt{x^2+y^2},\sqrt{x^2+y^2})$.

738 $\mathbf{F}=(\operatorname{senh}y\cosh y,\cosh x\operatorname{senh}y)$.

739 $\mathbf{F}=(x^3+2xy+y^2,x^2+2xy+y^3)$.

740 $\mathbf{F}=(\sqrt{x}+\sqrt{y},\frac{x}{2\sqrt{y}})$.

741 $\mathbf{F}=(\cos x+\log y,\frac{x}{y}+e^y)$.

742 $\mathbf{F}=(2xyz+\operatorname{sen}x,x^2z,x^2y)$.

743 $\mathbf{F} = (z\cos(xy)+y\cos(xz), z\cos(xy)+x\cos(yz), y\cos(xz)+x\cos(yz))$.

744 $\mathbf{F} = (z\cos(xz) - y\,\mathrm{sen}(xy), -x\,\mathrm{sen}(xy), x\cos(xz))$.

745 $\mathbf{F} = (y\cos z - yze^x, x\cos z - ze^x, -xy\,\mathrm{sen}\,z - ye^x)$.

Solución:

738 Sabemos que la condición necesaria y suficiente para que un campo definido en todo $\mathbb{R}^3$ sea gradiente es que su rotacional sea nulo. Esta condición se reduce a la igualdad de las derivadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

para un campo en el plano $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$. En este ejemplo concreto se trata de comprobar dicha igualdad entre las derivadas parciales correspondientes. Un sencillo cálculo hace ver que si

$$F_1(x, y) = \mathrm{senh}\,y\cosh y, \quad F_2(x, y) = \mathrm{senh}\,y\cosh x,$$

entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cosh^2 y + \mathrm{senh}^2\,y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \mathrm{senh}\,x\,\mathrm{senh}\,y,$$

y por tanto $\mathbf{F}$ no es un campo gradiente.

741 Si

$$\mathbf{F} = \left(\cos x + \log y, \frac{x}{y} + e^y\right),$$

es sencillo comprobar que sí se da la igualdad de las derivadas parciales correspondientes. Por lo tanto este campo sí es gradiente. Para encontrar un potencial procedemos en dos etapas. En primer lugar si $f(x, y)$ es el potencial que buscamos, debemos tener

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \log y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y} + e^y.$$

Por ejemplo, de la primera igualdad, integrando con respecto a x, llegamos a que

$$f(x, y) = \mathrm{sen}\,x + x\log y + g(y),$$

para un cierta función arbitraria $g(y)$. Si derivamos esta expresión con respecto a y e igualamos a F_2 encontramos que la igualdad

$$\frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + e^y$$

debe verificarse. En consecuencia, descubrimos que

$$g(y) = e^y + \text{constante},$$

y llevando esta expresión a f (tomando por ejemplo la constante igual a cero), encontramos el potencial

$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + x \log y + e^y.$$

743 Para saber si un campo en el espacio es gradiente debemos comprobar si su rotacional es nulo. Teniendo en cuenta que si

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

es fácil comprobar en este caso que el rotacional del campo F proporcionado no es nulo, pues ya la primera componente no se anula.

745 Es sencillo comprobar que el campo

$$\mathbf{F} = \left(y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -xy \operatorname{sen} z - ye^x \right),$$

sí es gradiente, pues su rotacional es cero.
Sea $f(x, y, z)$ un potencial del mismo. Procedemos en tres etapas para determinar f. En primer lugar, debemos exigir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = y \cos z - yze^x,$$

de donde integrando con respecto a x, se obtiene

$$f(x, y, z) = yx \cos z - yze^x + g(y, z),$$

siendo g una función de (y, z). En segundo lugar, debemos tener

$$x \cos z - ze^x = F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos z - ze^x + \frac{\partial g}{\partial y},$$

de donde

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

y en consecuencia $g = g(z)$. Finalmente, exigimos

$$-xy \operatorname{sen} z - ye^x = F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = -yx \operatorname{sen} z - ye^x + g'(z)$$

y concluimos que g debe ser una constante que tomamos, por ejemplo, como cero. Un potencial es

$$f(x, y, z) = yx \cos z - yze^x.$$

746 Probar que cualquier campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (P(x), Q(y))$, con P y Q funciones derivables definidas en todo $\mathbb{R}$, posee un potencial escalar.

747 Probar que todo campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (f(x+y), f(x+y))$, donde f es una función derivable de una variable definida en todo $\mathbb{R}$, posee un potencial escalar.

748 Encontrar una función $Q(x,y)$ tal que el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = (\sqrt{x}y^3, Q(x,y))$$

sea conservativo.

Solución 748:

La condición para que el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\sqrt{x}y^3, Q(x,y)\right)$$

sea conservativo es que se verifique la igualdad de las derivadas parciales

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2\sqrt{x}.$$

Por lo tanto, basta tomar

$$Q(x,y) = 2y^2\sqrt{x^3} + g(y),$$

para cualquier función g de la variable y.

6 2

INTEGRALES DE LÍNEA. CAMPOS CONSERVATIVOS

■ Evaluar las integrales de trayectoria para las funciones y curvas siguientes:

749 $f(x,y) = 9 + 8\sqrt{y}$, $\sigma(t) = (2t\sqrt{t}, t^2)$, $t \in [0,1]$.

750 $f(x,y) = y$, $\sigma(t) = (t, t^3)$, $t \in [-1,0]$.

751 $f(x,y,z) = (1 + \frac{9}{4}z^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [0, \frac{20}{3}]$.

752 $f(x,y,z) = x\cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, para $t \in [0,1]$.

753 $f(x,y,z) = \frac{x+y}{z+y}$, $\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$, para $t \in [1,2]$.

754 $f(x,y,z) = x + \cos^2 z$, $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

755 $f(x,y) = x + y$, $\sigma \equiv$ triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

Solución:

753 La fórmula para calcular la integral de una función escalar sobre una curva es

$$I = \int_\sigma f = \int_{t_0}^{t_1} f(\sigma(t))\,|\sigma'(t)|\;dt.$$

En este ejemplo concreto tendremos

$$f(\sigma(t)) = 1$$

pues $x = z$ sobre la curva σ. Además

$$\sigma'(t) = (1, \sqrt{t}, 1), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{2+t}.$$

Por tanto

$$I = \int_1^2 \sqrt{2+t}\,dt = \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right).$$

754 Calculamos

$$\sigma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1),\ |\sigma'(t)| = \sqrt{2},$$
$$f(\sigma(t)) = \operatorname{sen} t + \cos^2 t.$$

Así, la integral que nos solicitan será

$$I = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \cos^2 t)\sqrt{2}\,dt.$$

Teniendo en cuenta la fórmula del ángulo doble

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2},$$

la integral anterior sale inmediatamente. Su valor final es $\pi\sqrt{2}$.

756 Encontrar el promedio de la coordenada y en la trayectoria dada por $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$, con $t \in [0, 1]$.

Solución 756:

El promedio de la variable y sobre una curva es la integral

$$\frac{1}{\operatorname{long}(\sigma)} \int_\sigma y.$$

Los elementos que nos hacen falta son

$$\sigma'(t) = (2t, 1, 0), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{1+4t^2},$$
$$y(t) = t,$$

$$\text{long}(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}-2),$$
$$\left[\text{con el cambio } \tfrac{1+4t^2}{t^2} = x^2\right]$$

El valor promedio será por tanto

$$\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt.$$

La primitiva que debemos calcular es inmediata con el cambio de variable $s = 1+4t^2$. El resultado es $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$, y por tanto, el promedio pedido es

$$\frac{\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{5}-2\right)}$$

757 Sea $f(x,y) = x - y$ y $\sigma(t) = (t^4, t^4)$, para $-1 \leq t \leq 1$. Representar σ, calcular $\int_\sigma f\,d\sigma$ y la longitud de la curva.

758 Esbozar la curva paramétrica $\sigma(t) = (t^3, \text{sen}(t^3))$, con $t \in [0, \sqrt[3]{\pi}]$. Si $f(x,y) = \sqrt{2-y^2}$, calcular $\int_\sigma f\,d\sigma$.

759 Esbozar la curva en el espacio $\sigma(t) = (t^2\cos t, t^2 \,\text{sen}\, t, t)$, con $0 \leq t \leq 4\pi$. Si $f(x,y,z) = z(2+\sqrt{x^2+y^2})$, encontrar $\int_\sigma f\,d\sigma$.

Solución 759:

Para hacernos una idea de qué curva en el espacio representa la parametrización

$$\sigma(t) = (t^2\cos t, t^2 \,\text{sen}\, t, t), \quad t \in [0, 4\pi],$$

observamos que en coordenadas cilíndricas tenemos $z = \sqrt{r}$. Como la superficie de ecuación $z = \sqrt{r}$ es de revolución, su boceto se obtiene haciendo rotar alrededor del eje Z el grafo de la función raíz cuadrada. La curva se "enrolla" alrededor de esta superficie según la Figura 1. Para calcular la integral que nos piden, necesitamos las expresiones siguientes

$$f(\sigma(t)) = t(2+t^2), \quad |\sigma'(t)| = \sqrt{1+4t^2+t^4}.$$

En concreto,

$$I = \int_0^{4\pi} (2t+t^3)\sqrt{1+4t^2+t^4}\,dt.$$

Mediante el cambio de variable $s = 1+4t^2+t^4$, la integral anterior se convierte en

$$I = \frac{1}{4}\int_1^{1+64\pi^2+256\pi^4} \sqrt{s}\,ds = \frac{1}{6}\left[\left(1+64\pi^2+256\pi^4\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

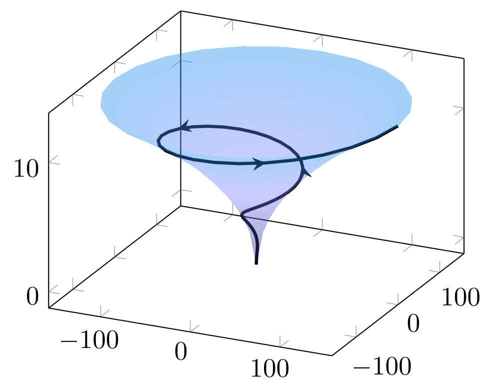


Figura 1: Ejercicio 759: curva sobre $z = \sqrt{r}$

■ Evaluar las siguientes integrales de línea $\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\sigma$:

760 $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}^2 x)$, $\sigma(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

761 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, $\sigma(t) = (t, t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$.

762 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, 2)$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

763 $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z^2+1}, \frac{x}{1+y^2}, e^y\right)$, $\sigma(t) = \big((1+t^2)^2, 1, t\big)$, con $t \in [0, 1]$.

764 $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, $\sigma \equiv$ triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

765 $\mathbf{F}(x, y, z) = (ye^{x^2}, xe^{y^2}, \operatorname{ch}(xy^3))$, $\sigma(t) = (e^t, e^t, 3)$, $t \in [0, 1]$.

Solución:

763 La integral de un campo $\mathbf{F}$ sobre una curva parametrizada por σ es la integral

$$I = \int_\sigma \mathbf{F} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt,$$

donde $[t_0, t_1]$ es el rango en el que se mueve el parámetro t. En nuestro caso concreto necesitamos las expresiones

$$\sigma'(t) = (2(1+t^2)2t, 0, 1), \quad \mathbf{F}(\sigma(t)) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{(1+t^2)^2}{2}, e\right),$$

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = e + 4t.$$

La integral que nos piden será por tanto

$$I = \int_0^1 (e + 4t)\ dt.$$

Esta integral es inmediata. Su valor es $2 + e$.

765 Igual que en el ejercicio anterior, necesitamos calcular las expresiones

$$\sigma'(t) = (e^t, e^t, 0), \quad \mathbf{F}(\sigma(t)) = \left(e^t e^{e^{2t}}, e^t e^{e^{2t}}, \operatorname{ch}(e^{4t})\right),$$
$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 2e^{2t} e^{e^{2t}}.$$

La integral que nos interesa es

$$I = \int_0^1 2e^{2t} e^{e^{2t}}\ dt.$$

El cambio de variable $s = e^{2t}$ convierte esta integral en inmediata

$$I = \int_1^{e^2} e^s\, ds = e^{e^2} - e.$$

■ Evaluar las siguientes integrales:

766 $\int_\sigma x\,dy - y\,dx$, $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, para $0 \le t \le 2\pi$.

767 $\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$, $\sigma(t) = (t, t^4, 0)$, con $0 \le t \le 1$.

768 $\int_\sigma x^2\,dx + xy\,dy + dz$, $\sigma(t) = (t, t^2, 1)$, para $0 \le t \le 1$.

769 $\int_\sigma \operatorname{sen} z\,dx + \cos z\,dy - (xy)^{\frac{1}{3}}\,dz$, $\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t)$, para $0 \le t \le \frac{7\pi}{2}$.

Solución:

767 Sobre la parametrización

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^4, \quad z(t) = 0,$$

tendremos

$$dx = 1, \quad dy = 4t^3, \quad dz = 0,$$

y por tanto

$$I = \int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$$

vendrá dada por

$$I = \int_0^1 \left(t^4 + (3t^{12} - t)4t^3\right)\, dt.$$

Después de realizar las operaciones indicadas e integrar el polinomio resultante encontramos el valor de la integral $\frac{3}{20}$.

769 En este ejemplo tenemos

$$\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t),$$
$$\sigma'(t) = \left(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2 t \cos t, 1\right).$$

La integral de línea que nos piden será

$$I = \int_0^{\frac{7\pi}{2}} \left(-3\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t + 3\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t\cos t\right)\, dt,$$

es decir,

$$I = -\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \operatorname{sen} t\cos t\, dt = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{\frac{7\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

■ Hallar el valor de las siguientes integrales de línea a lo largo de las curvas dadas:

770 $\int_C xe^y\, dx + x^2 y\, dy$, con C el segmento recta $y = 3$ con $0 \leq x \leq 2$.

771 $\int_C \cos x\, dx + \operatorname{sen} y\, dy$, con C el trozo de recta $y = x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

772 $\int_C (x+y)\, dx - 3xy\, dy$, con C la curva $x^2 + y^2 = 4$.

773 $\int_C yz^2\, dx + xz^2\, dy + 2xyz\, dz$, con C la curva que une los puntos $(-1, 2, -2)$ y $(1, 5, 2)$ a través de tres segmentos paralelos a los ejes Z, X e Y, en ese orden.

Solución:

772 En este caso, la curva nos la determinan mediante su ecuación $x^2 + y^2 = 4$, de modo que debemos dar una parametrización de la misma. Como se trata del círculo centrado en el origen y radio 2, sabemos que una posible descripción es

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nótese además que como no nos precisan una orientación de la curva elegimos la determinada por la propia parametrización anterior. Con esta parametrización la integral que nos interesa queda

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-4 \operatorname{sen} t \cos t - 4 \operatorname{sen}^2 t - 24 \cos^2 t\right) \, dt.$$

Es sencillo comprobar que los términos primero y tercero tienen integral nula, mientras que el segundo, usando la fórmula del ángulo doble, vale -4π, que es por tanto el valor solicitado.

773 La curva C consta de tres partes correspondientes a los segmentos paralelos a los ejes coordenados que unen los puntos $(1, 5, 2)$ y $(-1, 2, -2)$. En concreto tendremos tres contribuciones a la integral, correspondientes a cada uno de los segmentos de que consta la curva C. La primera parte de C se parametriza como

$$\sigma_1(t) = (-1, 2, -2 + 4t), \quad t \in [0, 1].$$

La parte de la integral correspondiente a esta parametrización será

$$I_1 = -\int_0^1 16(4t - 2) \, dt = 0.$$

La segunda contribución corresponde a la parametrización

$$\sigma_2(t) = (2t - 1, 2, 2), \quad t \in [0, 1].$$

La contribución a la integral asociada a esta parametrización es

$$I_2 = \int_0^1 16 \, dt = 16.$$

Finalmente, tenemos

$$\sigma_3(t) = (1, 2 + 3t, 2), \quad t \in [0, 1],$$

y

$$I_3 = \int_0^1 12 \, dt = 12.$$

La integral total es la suma de esta tres contribuciones, resultado igual a 28.

774 Evaluar la integral de $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ alrededor de la hipocicloide

$$\sigma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

775 Evaluar $\int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz$, donde C es el trozo de recta que une los puntos $(1,1,1)$ y $(1,2,4)$.

■ Sea $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Evaluar $\int_C \mathbf{F}$ para cada una de las curvas siguientes:

776 El semicírculo $y = \sqrt{4-x^2}$ desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.

777 El semicírculo $y = -\sqrt{4-x^2}$ desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$.

778 El segmento de $(2,0)$ a $(1,0)$ seguido del semicírculo definido por $y = \sqrt{1-x^2}$ hasta $(-1,0)$ y junto con el segmento de $(-1,0)$ hasta $(-2,0)$.

779 El segmento de $(2,0)$ a $(1,0)$ seguido del semicírculo dado por $y = -\sqrt{1-x^2}$ hasta $(-1,0)$ y junto con el segmento de $(-1,0)$ hasta $(-2,0)$.

780 El círculo $x^2+y^2=4$ partiendo de $(2,0)$ en sentido positivo.

781 El círculo $x^2+y^2=1$ partiendo de $(1,0)$ en sentido positivo.

782 La elipse $x^2+4y^2=4$ desde $(2,0)$ en sentido positivo.

783 El círculo $(x-2)^2+y^2=1$ partiendo de $(3,0)$ en sentido positivo.

Solución:

776 En este problema precisamos una parametrización de la curva que nos describen. Se trata del semicírculo superior centrado en el origen y radio 2, que se puede parametrizar por

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \quad t \in [0,\pi].$$

Para evaluar la integral necesitamos calcular la expresión

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t).$$

Tras unos cuantos cálculos sencillos, el valor de esta expresión es igual a 1 para todo t. En consecuencia la integral que interesa vale π.

778 La curva propuesta consta de tres partes

$$\sigma_1(t) = (2-t, 0), \quad t \in [0,1],$$
$$\sigma_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0,\pi],$$
$$\sigma_3(t) = (-1-t, 0), \quad t \in [0,1].$$

Si calculamos con un poco de paciencia las tres contribuciones a la integral del campo $\mathbf{F}$, llegamos a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 0\,dt = 0, \\ I_2 &= \int_0^\pi 1\,dt = \pi, \\ I_3 &= \int_0^1 0\,dt = 0, \\ I = I_1 &+ I_2 + I_3 = \pi. \end{aligned}$$

782 La parametrización que nos hace falta es

$$\sigma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

El producto escalar $\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ es

$$\frac{2}{4\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t},$$

y la integral que interesa

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\,dt = 2\pi. \qquad [\text{Cambio } \tan t = x]$$

783 La parametrización que necesitamos es

$$\sigma(t) = (2 + \cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

el producto escalar es

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \frac{1 + 2\cos t}{5 + 4\cos t},$$

y la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos t}{5 + 4\cos t}\,dt = \pi. \qquad \left[\text{Cambio } \tan\left(\tfrac{t}{2}\right) = x\right]$$

784 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ un campo de fuerzas en $\mathbb{R}^3$ dado. Calcular el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula desde el punto $(0, 0, 0)$ al $(1, 2, 4)$ a lo largo del segmento que los une.

785 Encontrar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ definido por $\mathbf{F} = (z, -x, y)$ al mover una partícula desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el $(2, 4, 8)$ a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = x^3$.

786 Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$, al mover una partícula desde el punto $(-1, 0)$ hasta el $(1, 0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Qué elipse (es decir, qué valor de b) hace mínimo el trabajo?

787 Un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^2$ viene dado por la ecuación $\mathbf{F}(x, y) = (cxy, x^6y^2)$, con c una constante. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde el punto $(0, 0)$ hasta la recta $x = 1$ siguiendo una curva de la forma $y = ax^b$, con a y b constantes positivas. Encontrar el valor de c (en función de a y de b) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea nulo.

Solución 787:

El trabajo realizado por un campo de fuerzas al mover una partícula a lo largo de un camino viene dado precisamente por la integral del campo a lo largo de dicha curva. En el ejemplo que nos ocupa, la curva viene dada por la parametrización

$$\sigma(t) = (t, at^b), \quad t \in [0, 1].$$

De este modo el producto escalar que debemos integrar es

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (cat^{b+1}, a^2t^{6+2b}) \cdot (1, abt^{b-1}) = cat^{b+1} + a^3bt^{3b+5}.$$

En consecuencia el trabajo realizado será la integral

$$\int_0^1 \left(cat^{b+1} + a^3bt^{3b+5}\right) \, dt = \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6}.$$

Si se pretende determinar el valor de c (en función de a y b) para que dicho trabajo sea nulo, debemos exigir

$$\frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = 0,$$

de donde se obtiene $c = -\frac{a^2b}{3}$.

788 Hallar la masa de un alambre delgado en forma de un cuadrante de circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, si la función densidad de masa es $\rho(x, y) = x + y$.

Solución 788:

Cuando una magnitud física se determina por su densidad puntual sobre el cuerpo en el que se haya presente, la cantidad total de dicha magnitud sobre todo el cuerpo es la integral sobre el mismo de dicha densidad. Así, si $\rho(x, y) = x + y$ es la densidad de masa de un alambre fino que tiene

la forma del cuarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x, y \geq 0$, la masa total del mencionado alambre será

$$\int_C \rho,$$

donde C es el cuarto de círculo. Una parametrización de éste es

$$\sigma(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

de modo que la masa total es la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos t + r \operatorname{sen} t) r\, dt.$$

Nótese cómo $|\sigma'(t)| = r$. El valor de esta integral es sencillo de calcular y vale $2r^2$.

789 (a) Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(e^y \frac{1 + e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}, \frac{xe^y}{1+e^x} \right),$$

probar que es un gradiente y encontrar un potencial para dicho campo.

(b) Consideremos ahora la curva C con parametrización

$$\alpha(t) = (t, 1 - t^2), \quad t \in [0, 1],$$

y el campo

$$\mathbf{G}(x, y) = \left(e^y \frac{1 + e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}, x\frac{1 + e^x + e^y}{1+e^x} \right).$$

Usando el apartado anterior, encontrar el valor de la integral $\int_C \mathbf{G} \cdot d\sigma$.

Solución 789:

(a) Comprobar que el campo dado $\mathbf{F}$ es un gradiente es sencillo pues un cálculo directo da

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^y \frac{1 + e^x(1-x)}{(1+e^x)^2}.$$

Encontrar un potencial para dicho campo es también un ejercicio sencillo de integración. Integrando con respecto a y en la igualdad

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \frac{x}{1+e^x},$$

obtenemos

$$f(x, y) = e^y \frac{x}{1+e^x} + g(x).$$

Derivando respecto a x e igualando a la primera componente de $\mathbf{F}$, vemos inmediatamente que podemos tomar $g(x) = 0$. Por tanto un potencial para $\mathbf{F}$ es

$$f(x,y) = e^y \frac{x}{1+e^x}.$$

(b) Para calcular la integral de línea de un campo vectorial complicado, como es el caso, es conveniente primero averiguar si se trata de un campo gradiente, pues entonces el cálculo de la integral se reduce a evaluar un potencial vectorial en los extremos de la curva. Un simple cálculo muestra que el campo $\mathbf{G}$ no es gradiente. No obstante, antes de atacar el cálculo directo de la integral, usando la parametrización de la curva que nos dan, resulta interesante tratar de relacionar este campo con otro que sí sabemos que es gradiente. Remitiéndonos al apartado anterior, observamos que el campo $\mathbf{G}$ se puede descomponer como

$$\mathbf{G}(x,y) = \mathbf{F}(x,y) + (0,x),$$

donde $\mathbf{F}$, del apartado anterior, sí es un campo gradiente. En consecuencia, la linealidad de la integral proporciona

$$\int_C \mathbf{G} = \int_C \mathbf{F} + \int_C (0,x).$$

Ahora bien, la integral de $\mathbf{F}$ sobre C puede evaluarse de manera muy cómoda mediante el potencial que se ha calculado antes. Así

$$\int_C \mathbf{F} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1,0) - f(0,1) = \frac{1}{1+e}.$$

Por otro lado

$$\int_C (0,x) = \int_0^1 t(-2t)\,dt = -\frac{2}{3}.$$

Finalmente

$$\int_C \mathbf{G} = \frac{1}{1+e} - \frac{2}{3}.$$

■ Comprobar que los siguientes campos son gradientes y usarlos para calcular las integrales pedidas:

790 $\displaystyle\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$, donde $C \equiv (5t^3, -t^3)$, $t \in [-1,1]$.

791 $\displaystyle\int_C 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$, con $C \equiv (3t^2+1, 2t)$, $t \in [0,1]$.

792 Sea C la curva de parametrización $\sigma(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{-t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^6}\right)$, con $t \in [0,1]$. Calcular la integral

$$I = \int_C y^2 z^3\,dx + (2xyz^3 + z^2)\,dy + (3xy^2z^2 + 2yz + 1)\,dz.$$

Solución 792:

Se trata de calcular la integral del campo

$$\mathbf{F} = (y^2z^3, 2xyz^3 + z^2, 3xy^2z^2 + 2yz + 1)$$

sobre la curva que se da. Los cálculos pueden resultar tediosos o incluso imposibles de realizar, a menos que el campo F resulte ser gradiente en cuyo caso, con un potencial, la integral se calcula inmediatamente. Si calculamos el rotacional de F encontramos que, efectivamente, se trata de un campo gradiente. Además, siguiendo con cuidado los pasos para determinar un potencial, encontramos que la función

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + yz^2 + z$$

es un potencial escalar de $\mathbf{F}$. Así pues

$$I = \int_C \mathbf{F} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - f(0,0,0) = \tfrac{25}{64}.$$

793 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, donde C es la curva dada por $y = x^2$, $z = x^4$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

794 Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right),$$

a lo largo de la curva definida por:

$$\sigma(t) = \left(\log(t^2 - t + 1), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(t^3 + 3t^2 - 3t)\right), \frac{\cos(t^5 - t) - 1}{(t^2 + t + 1)^{4/7}}\right),$$

para $t \in [0,1]$.

Solución 794:

Una simple comprobación muestra que el campo $\mathbf{F}$ es gradiente, pues está definido en todo el espacio y satisface $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Buscamos pues, un potencial escalar, es decir, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & e^{xz}(xyz^2 + yz) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & xze^{xz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & e^{xz}(x^2yz + xy) \end{array}\right\}$$

entonces

$$f(x,y,z) = \int xze^{xz}\,dy = xyze^{xz} + \varphi(x,z).$$

Para determinar φ usamos las otras dos ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xz}(xyz^2 + yz) = e^{xz}(yz + xyz^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \varphi(x,z) \equiv \varphi(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xz}(x^2yz + xy) = e^{xz}(xy + x^2yz) + \varphi'(z) \Rightarrow \varphi(z) = \text{cte}.$$

Luego una función potencial es $f(x,y,z) = xyze^{xz}$. Finalmente, como $\sigma(0) = (0,0,0)$, $\sigma(1) = (0,1,0)$,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\sigma = f(0,1,0) - f(0,0,0) = 0.$$

795 Obtener el valor de la siguiente integral de línea:

$$\int_C \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx + \left(\frac{y}{1+x^2+y^2+z^2} + 2y\right)dy + \left(\frac{z}{1+x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+1}\right)dz,$$

donde C es el trozo de curva dada por las ecuaciones $z^2 = x^2+y^2$, $x^2+y^2 = y$, $x \geq 0$, desde el origen al punto $(0,1,1)$.

Solución 795:

Es inmediato comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\tfrac{x}{1+x^2+y^2+z^2}, \tfrac{y}{1+x^2+y^2+z^2} + 2y, \tfrac{z}{1+x^2+y^2+z^2} + \tfrac{1}{z^2+1}\right),$$

es gradiente, pues está definido en todo $\mathbb{R}^3$ y satisface $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Buscamos pues, un potencial escalar, resolviendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{1+x^2+y^2+z^2} + 2y\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+1}
\end{aligned}$$

Es fácil obtener

$$f(x,y,z) = \log\sqrt{1+x^2+y^2+z^2} + y^2 + \arctan z.$$

Finalmente,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\sigma = f(0,1,1) - f(0,0,0) = \log\sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{4}.$$

796 Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Comprobar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del disco unidad en el plano XY es cero:

(a) Directamente.

(b) Probando que $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función f que habrá que determinar.

797 Sea $\mathbf{F} = (yz, xz + y, xy + 1)$ un campo vectorial. Definimos la función $f(x,y,z) = \displaystyle\int_C \mathbf{F}$ donde C es el segmento que une el punto $(0,0,0)$ con (x,y,z). Determinar f evaluando la integral de línea que la define y luego probar que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Solución 797:

El segmento de recta que une $(0,0,0)$ con un punto genérico (x,y,z) es

$$\sigma(t) = t(x,y,z), \quad t \in [0,1].$$

El producto escalar que debemos integrar entre 0 y 1 es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= \left(t^2yz, t^2xz + ty, t^2xy + 1\right) \cdot (x,y,z)\\ &= 3t^2xyz + ty^2 + z.\end{aligned}$$

Así pues

$$f(x,y,z) = \int_C \mathbf{F} = \int_0^1 (3t^2xyz + ty^2 + z)\,dt = xyz + \frac{y^2}{2} + z.$$

Si ahora calculamos el gradiente de esta función f, comprobamos que en efecto

$$\nabla f = \mathbf{F},$$

luego f es un potencial para $\mathbf{F}$ y por tanto este campo es gradiente.

798 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x^3 + x - y^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2 - 2xy)$$

y la curva dada por la parametrización

$$\sigma(t) = (t\operatorname{sen}(\pi t^2), t\cos(\pi t^2)),$$

para $t \in [0,1]$, calcular la integral $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\sigma$.

6 3 TEOREMA DE GREEN

799 Usar el teorema de Green para evaluar la integral

$$\int_C y\,dx - x\,dy,$$

donde C es la frontera del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ orientada en sentido positivo.

■ Verificar el teorema de Green en los siguientes casos:

800 El disco $\{x^2+y^2\leq 1\}$ y el campo $\mathbf{F}(x,y)=(xy,xy)$.

801 El anillo $\{1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ y el campo $\mathbf{F}(x,y)=(2x^3-y^3,x^3+y^3)$.

Solución 801:

El teorema de Green asegura que para un dominio D en el plano con frontera ∂D^+ orientada de modo que D queda a la izquierda, y un campo $\mathbf{F}=(P,Q)$ se tiene

$$\int_{\partial D^+}(P\,dx+Q\,dy)=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

En nuestro caso concreto D es el anillo centrado en el origen con radio exterior 2 y radio interior 1 (ver Figura 2). De esta suerte la frontera de D consta de estos dos círculos que debemos orientar de modo contrario a fin de que la región delimitada quede a la izquierda según vamos recorriendo las curvas. La parametrización de ambos será

$$\begin{aligned} x&=2\cos\theta, &\quad y&=2\operatorname{sen}\theta, &\quad \theta&\in[0,2\pi],\\ x&=\cos\theta, &\quad y&=\operatorname{sen}\theta, &\quad \theta&\in[0,2\pi], \end{aligned}$$

y la única precaución es añadir un signo menos a la integral sobre el círculo interior debido a que debe recorrerse en sentido horario. Con un poco de cuidado en los cálculos tenemos

$$\begin{gathered}\int_{\partial D^+}(P\,dx+Q\,dy)=\\ \int_0^{2\pi}\Big[(16\cos^3\theta-8\operatorname{sen}^3\theta)(-2\operatorname{sen}\theta)+\\ (8\cos^3\theta+3\operatorname{sen}^3\theta)2\cos\theta-(2\cos^3\theta-\operatorname{sen}^3\theta)(-\operatorname{sen}\theta)\\ +(\cos^3\theta+\operatorname{sen}^3\theta)\cos\theta\Big]\,d\theta=\end{gathered}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-30\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta + 15\operatorname{sen}^4\theta + 15\cos^4\theta + 15\operatorname{sen}^3\cos\theta\right)\, d\theta$$
$$= \frac{45}{2}\pi.$$

Al calcular esta última integral, hemos tenido en cuenta que el primer

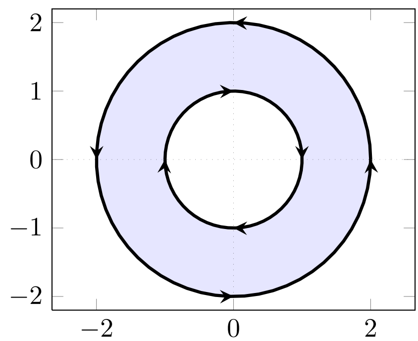


Figura 2: Gráfica del Ejercicio 801

y último sumando no contribuyen a la integral, mientras que para $\cos^4\theta$ y $\operatorname{sen}^4\theta$ hemos usado repetidamente las fórmulas del ángulo doble (cf. Ejercicio 535).

Por otro lado, transformando la integral doble a polares,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 3r^2 r\, dr\, d\theta = \frac{3}{2}\pi\, r^4\Big|_1^2 = \frac{45}{2}\pi.$$

802 Por medio del teorema de Green, calcular

$$\int_C (x^3 + y^3)\, dy - (x^3 + y)\, dx,$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido contrario al reloj.

803 Aplicar el Teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C x^2 y\, dx + xy^2\, dy$$

donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

Solución 803:

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \int_C (x^2 y\, dx + xy^2\, dy) = \iint_D (2xy - x^2)\, dx\, dy.$$

La región D se describe como

$$-2 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 8 - x^2,$$

y en consecuencia

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{8-x^2} (y^2 - x^2)\, dx\, dy = \frac{2816}{7}.$$

804 Sea $\mathbf{F}(x,y) = (2y + e^x, x + \operatorname{sen}(y^2))$ y C el círculo $x^2 + y^2 = 1$ con orientación positiva. Escribir $\int_C \mathbf{F}$ como una integral doble y evaluar.

805 Sea C la frontera del rectángulo $[1,2] \times [1,2]$. Evaluar $\int_C x^2 y\, dx + 3yx^2\, dy$ con orientación positiva usando el teorema de Green.

■ Usar el teorema de Green para calcular el área de las siguientes regiones planas:

806 El triángulo de vértices $(1,0)$, $(3,4)$, $(5,-1)$.

807 El cuadrilátero de vértices $(0,-1)$, $(3,0)$, $(1,-2)$, $(4,3)$.

808 El área entre las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

809 Región acotada por la astroide $(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución:

807 Recordemos en primer lugar que el área de una región D encerrada por una curva con orientación positiva C^+ viene dada por

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{C^+} (x\, dy - y\, dx).$$

Para encontrar el área de la figura cerrada formada por varios segmentos mediante el teorema de Green, debemos preocuparnos por integrar sobre segmentos de recta. En particular, sobre el segmento que empieza en el punto $A = (a_1, a_2)$ y acaba en $B = (b_1, b_2)$ podemos usar la parametrización

$$(1-t)(a_1, a_2) + t(b_1, b_2), \quad t \in [0,1].$$

Así la contribución a la integral anterior sobre este segmento será

$$\frac{1}{2}\int_0^1 [((1-t)a_1+ta_2)(b_2-b_1) \\ -((1-t)a_2+tb_2)(b_1-a_1)]\,dt.$$

Después de unos cuantos cálculos y cancelaciones, llegamos a que tal integral vale

$$\frac{1}{2}(a_1b_2-b_1a_2)=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}.$$

Un sencillo argumento inductivo nos dirá que si una región esta limitada por los segmentos que unen los puntos $A_i=(a_1^i,a_2^i)$, $i=1,2,\dots,n$ donde $A_1=A_{n+1}$, entonces el área de tal figura será

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\det\begin{pmatrix}A_i\\A_{i+1}\end{pmatrix}.$$

En el caso concreto que nos ocupa, tras concretar el orden en el que deben tomarse los puntos, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}3&0\\4&3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}4&3\\0&-1\end{pmatrix}\right. \\ \left.+\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix}\right)=6.$$

809 La curva astroide o hipocicloide está representada en la Figura 39. Para encontrar el área que encierra, usamos el teorema de Green

$$\text{Área}(D)=\frac{1}{2}\int_C (x\,dy-y\,dx).$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\text{Área}(D)&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt\\ &=\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(2t)\,dt=\frac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

Hemos usado las fórmulas del ángulo doble para realizar esta última integración.

810 Usar la forma vectorial del teorema de Green para probar la *primera identidad de Green*:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \int_{\partial D^+} f(\nabla g)\cdot \mathbf{n}\,d\sigma - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

donde D satisface las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales de f y g (que son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$) existen y son continuas allí donde sea necesario.

811 Aplicar la primera identidad de Green para probar la *segunda identidad de Green*:

$$\iint_D \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\,dA = \int_{\partial D^+} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

en las mismas condiciones del Ejercicio 810.

812 (a) Sea C un segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) con (x_2, y_2). Probar que

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

(b) Denotemos por (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . ,(x_n, y_n) los vértices de un polígono recorridos en sentido antihorario alrededor del mismo. Usar el apartado anterior para probar que el área del polígono es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i),$$

donde $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$.

813 Si R es una región del plano tal que $C = \partial R$ está orientada positivamente, probar que para toda función dos veces diferenciable:

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x}\,dy - \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \iint_R \Delta f\,dA.$$

814 Sean $P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $Q(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$:

(a) Comprobar que $\displaystyle\int_{\partial R^+} P\,dy - Q\,dx = \iint_R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dA$, con R el anillo entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Probar que $\displaystyle\int_{\partial D^+} P\,dy - Q\,dx \neq \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dA$, con D el disco $x^2 + y^2 \le 1$.

(c) Explicar la aparente contradicción del apartado anterior con el Teorema de Green.

815 Calcula la integral

$$I = \int_C y^3\,dx + x^3\,dy,$$

donde C es la curva dada en polares con ecuación $r = \operatorname{sen}(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución 815:

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \iint_D 3(x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

donde D es la región encerrada por la curva cerrada C, que corresponde a un cuarto de la rosa de cuatro pétalos (véase Figura 3). Calculando esta integral doble en coordenadas polares, puesto que su frontera nos la proporcionan en estas coordenadas, tendremos

$$\begin{aligned} I =& 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen}(2\theta)} r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) r\,dr\,d\theta \\ =& \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\operatorname{sen}^4(2\theta)\,d\theta = \frac{3}{40}\operatorname{sen}^5(2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

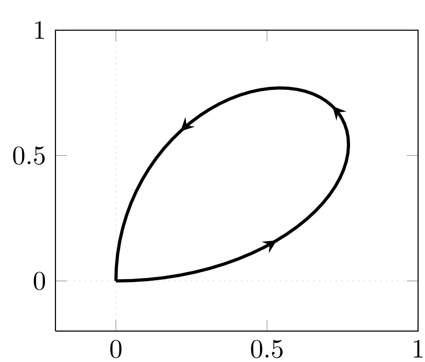


Figura 3: Curva del Ejercicio 815

816 Se considera la curva C parametrizada por $\sigma(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Para el campo $\mathbf{F}(x, y) = (y - x, y^2)$, calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F}$ mediante el teorema de Green.

Solución 816:

En esta situación no podemos aplicar directamente el teorema de Green puesto que la curva C no es una curva cerrada. Si usamos otra curva C_0 que una los puntos $(2\pi, 0)$ y $(0, 0)$, la unión de estas dos curvas sí es cerrada y por tanto limita una región en el plano. De entre todas las posibles opciones, la más sencilla será la recta que una estos dos puntos. Pero en este caso debemos tener muy presente que al cruzarse estas dos curvas las orientaciones pueden inducirnos a error si no lo hacemos con cuidado (véase la Figura 6.4(a)). Lo más aconsejable es dividir los cálculos en dos partes que corresponden a las dos regiones que en realidad limitan las dos curvas. Llamemos a estas dos regiones D_1 y D_2. Entonces si $\mathbf{F} = (P, Q)$, podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} + \int_{C_0} \mathbf{F}$$

$$= \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Si realizamos los cálculos, no es difícil comprobar que

$$\int_{C_0} \mathbf{F} = 2\pi^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

$$\iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = -\text{Área}(D_i), \quad i = 1, 2,$$

pues por simetría ambas regiones tienen el mismo área. En consecuencia, la integral solicitada vale $-2\pi^2$.

Otra opción hubiera sido cerrar con la curva mostrada en la Figura 6.4(b), para evitar los problemas de orientación.

817 Se considera la curva cerrada C de parametrización

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

que encierra un recinto R, y los campos escalares $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = y$. Se pide:

(a) Calcular $\displaystyle\int_C P\, dy - Q\, dx$.

(b) Probar que $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA > 0$.

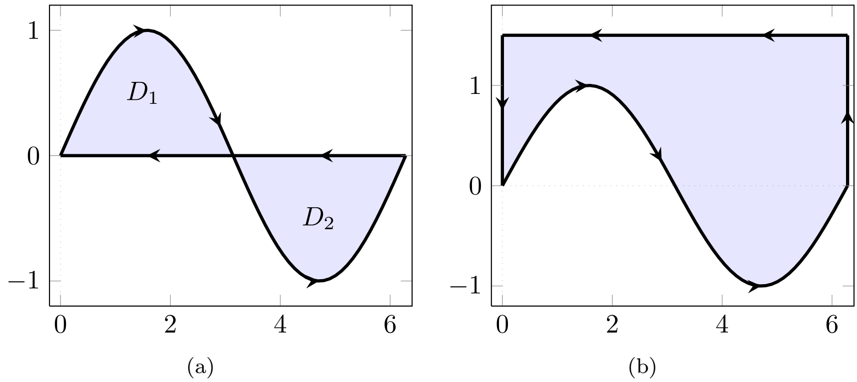


Figura 4: Dos posibilidades de cierre en el Ejercicio 816

(c) Explicar la aparente contradicción de los apartados anteriores con el Teorema de Green.

Solución 817:

(a) Con la parametrización dada, se calcula inmediatamente que

$$\int_C P\,dy - Q\,dx = 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt,$$

y escribiendo

$$\operatorname{sen}^3 t = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t,$$

se llega a la conclusión de que la integral anterior es nula.

(b) Por otro lado

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2$$

y por tanto

$$\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA = 2\,\text{Área}(R) > 0.$$

(c) De los apartados anteriores se tiene que

$$0 = \int_C P\,dy - Q\,dx = [\text{Green}] = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA > 0$$

de lo cual deducimos que algo falla en la aplicación del Teorema de Green. Este fallo viene provocado porque la curva C no es simple, esto es, se corta a sí misma ($\alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha(2\pi)$, véase la Figura 5), de forma que a mitad de recorrido incumple la orientación adecuada en el Teorema de Green.

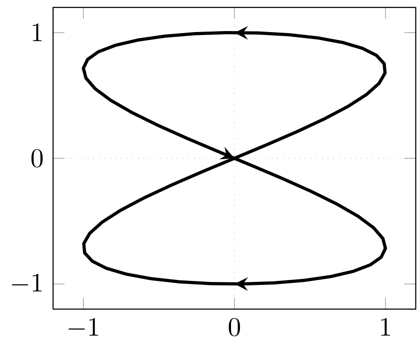


Figura 5: Ejercicio 817: curva no simple

818 Calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F}$ siendo $\mathbf{F}(x,y) = (e^x - y^3, \cos y + x^3)$ y C la circunferencia unidad.

6 4

INTEGRALES DE SUPERFICIE

819 Evaluar la integral $\int_S xy\, dS$, donde S es la superficie del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $z + x = 1$ y $x = y$.

820 Calcular $\int_S z\, dS$ siendo S la superficie dada por

$$\left\{(x,y,z) : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right\}, \quad \text{con } a > 0.$$

Solución 820:

Si la superficie S admite una parametrización

$$\Phi(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

entonces la integral de superficie de una función escalar f será

$$\int_S f\, dS = \int_D f(\Phi(u,v))\, |\Phi_u \times \Phi_v|\; du\, dv.$$

En este ejemplo concreto podemos tomar como parámetros (u,v), las mismas variables (x,y), de suerte que la superficie es

$$\Phi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right), \quad (x,y) \in D$$

donde D es el círculo centrado en el origen de radio a. Los vectores Φ_x y Φ_y coinciden con los vectores

$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

y la integral queda

$$\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

Después de realizar estas operaciones con un poco de cuidado, resulta que la integral es

$$\int_D a \, dx \, dy = \pi a^3.$$

821 Calcular $\int_S z^2 \, dS$ donde S es la frontera del cubo $[-1, 1]^3$.

■ Calcular las siguientes integrales de superficie:

822 $\int_S y \, dS$, donde S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ comprendida en el primer octante.

823 $\int_S xz \, dS$, con S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

824 $\int_S x \, dS$, para S definida por $y = x^2 + 4z$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$.

825 $\int_S yz \, dS$, donde S es la porción de $z = y + 3$ interior a $x^2 + y^2 = 1$.

826 $\int_S (y^2 + z^2) \, dS$, S la porción de $x = 4 - y^2 - z^2$ situada al frente de $x = 0$.

827 $\int_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, incluidas sus tapas.

Solución:

822 Si representamos la parte del plano $3x + 2y + z = 6$ en el primer octante (véase la Figura 6) nos damos cuenta de que se trata de un triángulo. Como además la función que tenemos que integrar sobre este triángulo es y, podemos tomar como parámetros las otras dos variables (x, z) y tomar $y = \frac{1}{2}(6 - z - 3x)$. La proyección del triángulo anterior sobre el plano XZ nos dará la región en la que

se mueven los parámetros (x, z). Esta proyección es también un triángulo determinado por las tres rectas $x = 0$, $z = 0$ y $3x + z = 6$ (poniendo $y = 0$ en la ecuación del plano). En definitiva,

$$0 \le x \le 2, \quad 0 \le z \le 6 - 3x.$$

La integral que nos solicitan se escribe por tanto

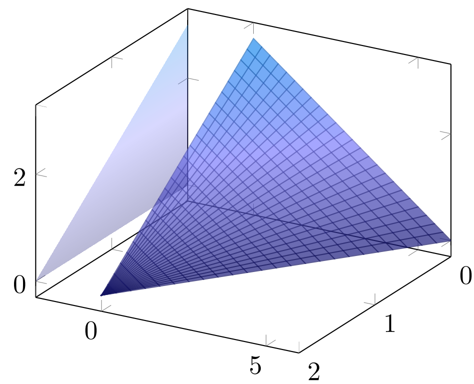


Figura 6: Representación gráfica del Ejercicio 822

$$I = \int_0^2 \int_0^{6-3x} \frac{6 - z - 3x}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \, dz \, dx.$$

Los cálculos, que son sencillos en este caso, nos llevan a

$$I = 3\sqrt{14}.$$

825 La superficie S en la que debemos integrar es la porción del plano $z = y + 3$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. En consecuencia, la elección más sencilla de parámetros corresponde a (x, y) que se deben mover en el círculo unitario del plano C. La superficie se considera así como una parte del grafo $z = y + 3$. Por tanto

$$I = \int_C y(y + 3)\sqrt{1 + 1} \, dx \, dy = \sqrt{2} \int_C (y^2 + 3y) \, dx \, dy.$$

Si ahora cambiamos a coordenadas polares, tendremos

$$I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 3r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Todas las integraciones involucradas son más o menos inmediatas, teniendo en cuenta las ideas de capítulos anteriores, llegando al

resultado final

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Nótese que se podrían haber elegido desde el principio como parámetros para describir la superficie S, las coordenadas polares.

827 La superficie S es el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ comprendido entre $z = 0$ y $z = 2$, incluyendo las dos tapas $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$, y $z = 2$, $x^2+y^2 \leq 9$. Dicha superficie consta por tanto de tres partes, las dos tapas y la superficie lateral, y debemos calcular tres contribuciones a la integral para después sumarlas.

En primer lugar, cuando $z = 0$, una parametrización válida es

$$\Phi(x, y) = (x, y, 0), \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 9\},$$

con vector normal de longitud uno. Así tendremos

$$I_1 = \int_{\{x^2+y^2\leq 9\}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Mediante las coordenadas polares encontramos inmediatamente

$$I_1 = \frac{81}{2}\pi.$$

Para la tapa superior, la parametrización puede ser $(x, y, 2)$ con $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, y análogamente

$$I_2 = \int_{\{x^2+y^2\leq 9\}} (x^2 + y^2 + 4).$$

Igual que antes encontramos

$$I_2 = \frac{153}{2}\pi.$$

Finalmente para la superficie lateral usamos como parámetros para describirla el ángulo θ y la altura z. Así tendremos

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z.$$

En este caso la longitud del vector normal es tres. La integral queda

$$I_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3(9 + z^2)\, dz\, d\theta.$$

Los cálculos conducen a

$$I_3 = 124\pi.$$

Por último la respuesta final será $I = I_1 + I_2 + I_3 = 241\pi$.

828 Si $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x^2, yz)$ y $S = \{z = 0,\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F}$.

829 Sea S el elipsoide de ecuación $2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ y $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular la integral $I = \displaystyle\int_S \mathbf{F}$.

Solución 829:

Para parametrizar el elipsoide usamos coordenadas esféricas dilatadas y desplazadas, que en este caso resultan

$$x(u,v) = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cos u \operatorname{sen} v, \quad y(u,v) = -1 + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$
$$z(u,v) = \cos v \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi].$$

Este cambio proporciona el vector normal exterior

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} v(\sqrt{2} \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v);$$

y la integral resulta

$$\int_S \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} v(1 + \sqrt{2} \cos u \operatorname{sen} v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)\, dv\, du$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}}.$$

■ Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de la superficie S. Cuando la superficie sea cerrada utilizar la orientación exterior:

830 $\mathbf{F} = (e^x, e^y, z)$, $S \equiv$ porción de $z = xy$ sobre el triángulo $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ con orientación hacia arriba.

831 $\mathbf{F} = (e^y, ye^x, xy)$, $S \equiv$ porción de $z = x^2 + y^2$ por encima de $0 \leq x \leq 1$ con $0 \leq y \leq 1$, orientada hacia fuera.

832 $\mathbf{F} = (x^2 y, -3xy^2, 4y^3)$, $S \equiv$ porción de $z = x^2 + y^2 - 9$ bajo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, con orientación hacia dentro.

833 $\mathbf{F} = (-x, -y, z^2)$, $S \equiv$ porción de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprendida entre $z = 1$ y $z = 2$, orientada hacia fuera.

834 $\mathbf{F} = (x, y, z)$, $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

835 $\mathbf{F} = (0, y, -z)$, $S \equiv y = x^2 + z^2$ para $0 \leq y \leq 1$, junto con $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$.

836 $\mathbf{F} = (x, 2y, 3z)$, $S \equiv$ cubo $[-1, 1]^3$.

Solución:

830 Como la integral de superficie de un campo exige integrar el producto escalar

$$\mathbf{F}(\Phi(u,v))\cdot(\Phi_u\times\Phi_v),$$

observamos que esta expresión es el producto mixto de los tres vectores $\mathbf{F}(\Phi)$, Φ_u y Φ_v. Sabemos que este producto mixto es el determinante con filas formadas por estos tres vectores. Así podemos escribir

$$\int_S \mathbf{F} = \int_D \det(\mathbf{F}(\Phi(u,v)), \Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v))\,du\,dv,$$

si D es la región en la que se mueven los parámetros (u,v). En el caso concreto que nos ocupa, podemos usar como parámetros las propias variables (x,y), de modo que la parametrización es

$$\Phi(x,y) = (x,y,xy), \quad -x\le y\le x,\ 0\le x\le 1$$

Así, tendremos que integrar sobre el triángulo determinado por los tres puntos dados el determinante

$$\begin{vmatrix} e^x & e^y & xy \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = xy - ye^x - xe^y.$$

En concreto, la integral que nos interesa es

$$\int_0^1\int_{-x}^{x}(xy - ye^x - xe^y)\,dy\,dx = -2e^{-1}.$$

833 Usamos las coordenadas polares como parámetros. De este modo ponemos

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\operatorname{sen}\theta,\quad z = r,\quad 1\le r\le 2,\ \ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Los vectores tangentes son

$$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \quad (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0).$$

Si hacemos el producto vectorial en este sentido obtenemos el vector normal hacia dentro. Como nos piden usar la orientación contraria, debemos invertir el orden de los dos vectores anteriores. Así debemos integrar en el rango en el que se mueven los parámetros, el determinante

$$\begin{vmatrix} -r\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & r^2 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} = -r^2 - r^3.$$

Así se obtiene el valor de la integral como

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 (-r^2 - r^3)\, dr\, d\theta = -\frac{73\pi}{6}.$$

834 Una alternativa frecuente para calcular la integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{F}$ consiste en obtener la integral del campo escalar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$, donde $\mathbf{N}$ es la normal unitaria a la superficie en cada punto.

En el caso de una superficie esférica, como la que nos ocupa, es muy fácil conocer cuál es la normal unitaria a la superficie; si S es la esfera de radio 3 centrada en el origen, la normal unitaria exterior en cada punto es $\mathbf{N} = \frac{1}{3}(x, y, z)$. Entonces,

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_S \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ahora bien, dado que estamos integrando sobre S, de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, está claro que

$$\int_S \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) = \int_S \tfrac{9}{3} = 3\text{Área}(S) = 108\pi$$

836 Como el cubo $[-1, 1]^3$ consta de seis caras, debemos calcular la integral del campo $\mathbf{F}$ sobre cada una de estas caras y sumar al final los resultados.

En primer lugar consideremos la cara $x = 1$. La normal exterior al cubo es $(1, 0, 0)$ y el producto escalar con $\mathbf{F} = (x, 2y, 3z)$ es x, que en la cara $x = 1$ vale precisamente 1. Por lo tanto, esta primera contribución a la integral corresponde al área de la cara, que es 4. El mismo razonamiento sobre la cara $x = -1$ lleva a que la contribución sobre esta cara vuelve a ser 4.

Razonando de modo similar en el resto de las caras, llegamos a que las contribuciones sobre las caras $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$ son, respectivamente, 8, 8, 12, 12. La integral total será 48.

837 El campo de velocidad de un fluido se describe por $\mathbf{F} = (1, x, z)$ (expresado en metros/segundo). ¿Cuántos metros cúbicos de fluido cruzan por segundo la superficie $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$? (Indicación: se está pidiendo $\displaystyle\int_S \mathbf{F}$).

838 Dado el campo eléctrico $\mathbf{E}(x, y, z) = (x, y, 0)$ y la superficie S definida por el cono $x^2 + z^2 = y^2$ con $z > 0$ y acotada por los planos $y = 0$ e $y = 1$, encontrar el flujo de $\mathbf{E}$ a través de S con orientación hacia arriba.

Solución 838:

Si usamos las coordenadas polares

$$x = r\cos\theta,\quad y = r, z = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\qquad 0 \le r \le 1,\quad 0 \le \theta \le \pi,$$

los vectores tangente ordenados para que proporcionen la orientación hacia arriba son

$$(\cos\theta, 1, \mathrm{sen}\,\theta)\,,\qquad (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0, r\cos\theta)\,.$$

De este modo debemos integrar el determinante

$$\begin{vmatrix} r\cos\theta & r & 0 \\ \cos\theta & 1 & \mathrm{sen}\,\theta \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = -r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta.$$

La integral es

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 -r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,dr\,d\theta = -\frac{\pi}{6}.$$

839 Dada c una constante y D una región cualquiera del plano XY, probar que si $S = \{z = c : (x,y) \in D\}$ entonces

$$\int_S (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\;dS = \int_D R(x,y,c)\,dA.$$

840 Encontrar el centro de gravedad de la superficie

$$S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\},\qquad R > 0$$

841 Utiliza la Ley de Gauss para determinar la carga eléctrica contenida en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, si el campo eléctrico es $\mathbf{E}(x,y,z) = (x,y,2z)$.

Solución 841:

La ley de Gauss afirma que la carga eléctrica contenida en la región limitada por una superficie cerrada es el flujo del campo eléctrico creado a través de dicha superficie. En este ejemplo la superficie cerrada consta de dos partes: el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z > 0$ y el plano del ecuador $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 0$.

En el primer caso, la normal unitaria es $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$ de modo que debemos integrar el producto escalar

$$(x,y,2z)\cdot(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}) = \frac{1}{a}\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right),$$

sobre la superficie determinada por $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$. Mediante las coordenadas polares, los cálculos conducen al valor

$$\frac{8}{3}\pi a^3.$$

Sobre el ecuador, tenemos como normal exterior $(-1, 0, 0)$, luego debemos integral el producto de $\mathbf{E}$ con este vector, que es $-x$. Es inmediato comprobar que esta integración da un resultado nulo.

Finalmente la carga total será

$$\frac{8}{3}\pi a^3.$$

842 La temperatura en el punto (x, y, z) de una sustancia de conductividad $k = 6.5$ es $T(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Encontrar la razón de flujo de calor hacia el interior a través de la superficie $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$.

Solución 842:

Debemos encontrar la integral de $\mathbf{F} = k\nabla T = 6.5(0, 4y, 4z)$ sobre la frontera del cilindro $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$. Sobre las dos tapas de dicho cilindro, las normales son $(\pm 1, 0, 0)$ y su producto escalar con $\mathbf{F}$ es por tanto cero. La contribución al flujo de calor por las tapas es por tanto nula. Sobre la superficie lateral el vector normal unitario es

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(0, y, z),$$

y el producto escalar con $\mathbf{F}$ es

$$\frac{6.5}{\sqrt{6}} 4(y^2 + z^2) = \frac{156}{\sqrt{6}}$$

debido a que sobre el cilindro, $y^2 + z^2$ vale 6. La integral sobre la superficie lateral del cilindro será la constante anterior por el área lateral, siendo el valor final 1248π.

6 5 TEOREMA DE GAUSS

■ Calcular mediante el teorema de la divergencia y con orientación exterior $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}$, en los siguientes casos:

843 $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$, $\Omega = [0, 1]^3$.

844 $\mathbf{F} = (y, z, xz)$, $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

845 $\mathbf{F} = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$, $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución:

844 De acuerdo con el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

En este caso, se encuentra de modo inmediato que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = x,$$

de modo que la integral que se nos pide es

$$\iiint_{\Omega} x\, dV.$$

Podemos razonar que esta integral es nula, debido a la simetría. La región Ω es simétrica respecto del eje Z en el sentido de que es una región de rotación alrededor de este eje. En consecuencia la integral de la variable x debe anularse.

845 En el ejemplo que nos ocupa, tendremos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

de modo que, usando las coordenadas esféricas para calcular la integral resultante,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} 3\rho^4 \operatorname{sen} \psi \, d\psi \, d\rho \, d\theta.$$

Las integraciones que se deben realizar son inmediatas. El resultado final es $\frac{12\pi}{5}$.

■ Calcular el flujo a través de S del campo $\mathbf{F}$ mediante el teorema de Gauss, con orientación exterior para:

846 $\mathbf{F} = (x^2, 0, 1)$; S es la superficie del cubo limitado por $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 4$.

847 $\mathbf{F} = (3x, 2y, 6z)$; S es la superficie del tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

848 $\mathbf{F} = (x, y, z)$; S es la superficie limitada por $z = -x^2 - y^2 - 2x + 4y + 4$ y por el plano XY.

Solución 847:

El flujo de un campo a través de una superficie cerrada S que encierra una región sólida R de modo que $S = \partial R$, se puede calcular a través del teorema de la divergencia. En efecto

$$\int_S \mathbf{F} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

En este caso concreto $\operatorname{div} \mathbf{F} = 11$, de modo que el flujo será 11 veces el volumen del tetraedro. Dicho volumen es la unidad en este ejemplo. Se puede calcular mediante la integral triple

$$\int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz\, dy\, dx = 1.$$

Por lo tanto el flujo es 11.

$\boxed{849}$ Calcular la integral $\displaystyle\int_S \mathbf{F}$ donde S es la frontera de la media bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, y $F = (x + 3y^5, y + 10xz, z - xy)$ con orientación exterior.

850 Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción de superficie S determinada por

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 2x, \qquad z \geq 0,$$

y orientada exteriormente, directamente y mediante el teorema de Gauss.

Solución 850:

La superficie S propuesta admite parametrización mediante las coordenadas cilíndricas del siguiente modo

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, r), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$$

En consecuencia el vector normal es, después de algunos cálculos,

$$\mathbf{n}(r, \theta) = r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1).$$

Así el producto escalar $\mathbf{F}(\Phi(r, \theta)) \cdot \mathbf{n}(r, \theta) = 0$, y el flujo de $\mathbf{F}$ sobre dicha superficie es también nulo.

Para llegar a esta misma conclusión usando el teorema de la divergencia, debemos completar la superficie S hasta limitar una región cerrada del espacio. En esta elección tenemos libertad completa pero debemos hacerlo de suerte que las integrales involucradas sean lo más sencillas posibles. Probablemente la elección más sencilla corresponda a considerar el cilindro, R, tal y como se muestra en la Figura 7,

$$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La frontera de este sólido está formada por la superficie S anterior (con orientación contraria a la que hemos usado), la superficie lateral del cilindro, S_l,

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},$$

y la tapa inferior, S_0,

$$x^2 + y^2 \le 2x, \quad z = 0.$$

Por el teorema de la divergencia tendremos

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S_l} \mathbf{F} + \int_{S_0} \mathbf{F}.$$

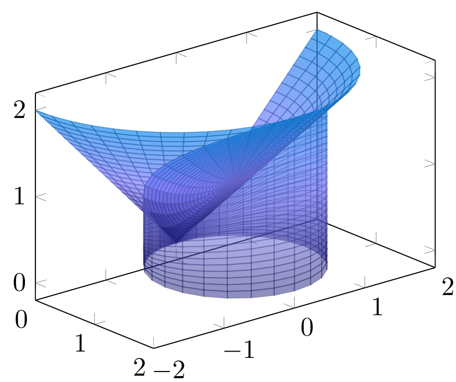


Figura 7: Gráfica del Ejercicio 850

Calculamos estas integrales de manera separada. Sobre S_0 es fácil comprobar que, si $\mathbf{N}$ es la normal unitaria exterior,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) = -z = 0, \quad \text{pues } z = 0 \text{ sobre } S_0.$$

Sobre S_l tenemos la parametrización

$$\Phi(\theta, z) = (2\cos^2\theta, 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta, z), \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le z \le 2\cos\theta$$

y el vector normal

$$\mathbf{n}(\theta, z) = (2\cos(2\theta), 2\operatorname{sen}(2\theta), 0).$$

El producto escalar $\mathbf{F}(\Phi(\theta, z)) \cdot \mathbf{n}(\theta, z)$ después de algunos cálculos resulta $4\cos^2\theta$, y por tanto la integral será

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} 4\cos^2\theta\, dz\, d\theta = \frac{32}{3}.$$

Finalmente, como $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$,

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 3\mathrm{Vol}(R).$$

Para calcular el volumen de R usamos las coordenadas cilíndricas para obtener

$$\mathrm{Vol}(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^r r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{32}{9}.$$

Por último, la integral que nos interesa será

$$\int_S \mathbf{F} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV - \int_{S_l} \mathbf{F} - \int_{S_0} \mathbf{F} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0,$$

como ya sabíamos.

851 Verificar el teorema de Gauss para el campo $\mathbf{F} = (xz, yz, xy)$ sobre la región limitada por $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ y $z \leq 4 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

852 Sea $\mathbf{F} = (2x, 3y, 5z + 6x)$ y $\mathbf{G} = (3x + 4z^2, 2y + 5x, 5z)$. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \mathbf{G}$$

donde S es cualquier superficie frontera de alguna región acotada del espacio.

Solución 852:

Este ejercicio se reduce a comprobar que los campos $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son tales que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G}$. Esto es de muy sencilla comprobación. Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia podemos concluir

$$\int_S \mathbf{F} = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{G}\, dV = \int_S \mathbf{G},$$

donde R es la región cuya frontera es la superficie cerrada S.

853 Evaluar la integral $\displaystyle\int_S \nabla \times \mathbf{F}$ donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen}(xy), e^x, -yz)$ con orientación exterior.

Solución 853:

La integral solicitada es nula pues el campo $\nabla \times \mathbf{F}$ es un campo con divergencia nula

$$\operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{F}) = 0,$$

al ser un rotacional. Por el teorema de la divergencia su integral sobre cualquier superficie cerrada será nula.

854 Sea S el casquete de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Se considera el campo vectorial:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right).$$

Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S hacia el exterior.

Solución 854:

No es difícil comprobar que el campo $\mathbf{F}$ tiene divergencia nula. Pero debemos tener la precaución de observar que no está definido en el origen. Luego cualquier región en la que trabajemos con dicho campo debe evitar el origen. En particular consideremos la superficie S_1 que consiste en el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y S_2, el anillo entre las circunferencias de radio 1 y 2 sobre el plano $z = 0$. Sea R la región limitada por estas tres superficies S, S_1 y S_2 (véase la Figura 8). Como el campo $\mathbf{F}$ tiene divergencia nula, concluimos que

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S_1} \mathbf{F} + \int_{S_2} \mathbf{F},$$

considerando las orientaciones apropiadas (exteriores). En consecuencia

$$\int_S \mathbf{F} = -\int_{S_1} \mathbf{F} - \int_{S_2} \mathbf{F}.$$

La última de estas dos integrales se calcula de manera directa pues la normal unitaria exterior es $(0, 0, -1)$, luego

$$\mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y la integral queda

$$\int_{S_2} -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dS = 0$$

pues S_2 se encuentra sobre el plano $z = 0$.

En cuanto a la otra integral observamos que la normal exterior unitaria es $\mathbf{N} = -(x, y, z)$ y

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = -\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -1,$$

Finalmente

$$\int_S \mathbf{F} = \text{Área}(S_1) = \frac{4\pi}{3}.$$

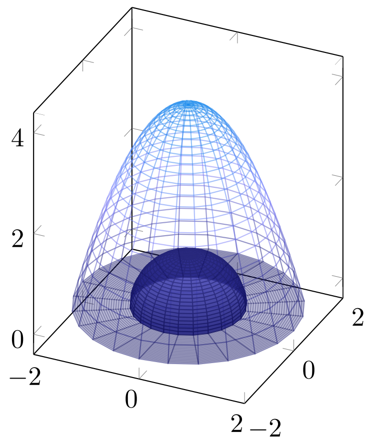


Figura 8: Región del Ejercicio 854

855 Sea $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y D una región del espacio con frontera ∂D. Probar que el volumen de D viene dado por $\frac{1}{3}\int_{\partial D}\mathbf{F}$. Usar este hecho para calcular el volumen de un cono circular de altura h y radio a.

856 Sea S una superficie cerrada que encierra un volumen D, y sea $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ la derivada direccional de una función escalar en la dirección de la normal unitaria exterior a S. Probar que

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \iiint_D \Delta f \, dV$$

857 Sea R el recinto en el espacio limitado por las superficies $x^2 + y^2 - z = 0$ y el hemisferio superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y sea S la superficie frontera de R. Considera el campo $\mathbf{F} = (x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3)$. Usando el teorema de la divergencia, transforma $I = \int_S \mathbf{F}$, y escribe la integral resultante en coordenadas cilíndricas (no es necesario calcular la integral final).

858 Sea $\mathbf{F} = (-xz, -yz, x^2 + y^2 + z^2)$ y S la superficie

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ -\tfrac{1}{2} \leq z \leq \tfrac{1}{2}\}.$$

Calcular la integral, con orientación exterior $I = \displaystyle\int_S \mathbf{F}$.

Solución 858:

Sean S_+ y S_- las dos tapas

$$z = \frac{1}{2}, \ x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, \ \text{y } z = -\frac{1}{2}, \ x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4},$$

respectivamente. Si completamos S con estas dos tapas orientadas exteriormente tendremos, por el teorema de la divergencia,

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S_+} \mathbf{F} + \int_{S_-} \mathbf{F}.$$

Ahora bien, es inmediato comprobar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ y que las normales unitarias sobre S_+ y S_- son, respectivamente, $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$. Por tanto

$$\int_{S_+} \mathbf{F} + \int_{S_-} \mathbf{F} = \int_{S_+} (x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4}) - \int_{S_-} (x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4}) = 0,$$

pues la proyección de S_+ y S_- sobre el plano XY es la misma. Concluimos que la integral solicitada es nula.

859 Calcula la integral del campo $\mathbf{F} = (xz^2 - xy^2, yx^2 - yz^2, zy^2 - zx^2)$ sobre la superficie $S = \{z^2 - x^2 - y^2 = 0,\ 1 \le z \le 2\}$, orientada al exterior.

860 Sea S la superficie dada por

$$S = \{x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \le z \le 1\} \cup \{3 - z = x^2 + y^2,\ 1 \le z \le 2\}.$$

Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de S, con orientación interior,

(a) Directamente.

(b) Usando el Teorema de Gauss.

Solución 860:

(a) Denotemos por S_1 y S_2 las dos partes de S, respectivamente y por S_3

$$\left\{3 - z = x^2 + y^2,\ 2 \le z \le 3\right\}.$$

Nótese que $S \cup S_3$ forma una superficie cerrada que limita la región del espacio atrapada por los dos paraboloides $2z = x^2 + y^2$ y $3 - z = x^2 + y^2$ (véase la Figura 9).

Las integrales del campo $\mathbf{F}$ sobre S_1 y S_2 requieren sendas parametrizaciones. Las coordenadas cilíndricas proporcionan la mejor parametrización en ambos casos. Así sobre S_1

$$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \tfrac{1}{2}r^2), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2}.$$

Después de calcular los vectores tangentes con respecto a θ y a r, evaluar el vector normal y realizar el producto escalar con $\mathbf{F}$, se llega a que debemos integrar la expresión

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}r^3\right) dr\, d\theta = -\pi.$$

Sobre S_2 tenemos de manera análoga

$$(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 3-r^2), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 \le r \le \sqrt{2}.$$

Igual que antes, desembocamos en la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \left(-3r - r^3\right)\,dr\,d\theta = -\frac{9}{2}\pi.$$

Por la tanto la integral pedida sobre S es la suma de estas dos integrales. Su valor es $-\frac{11\pi}{2}$.

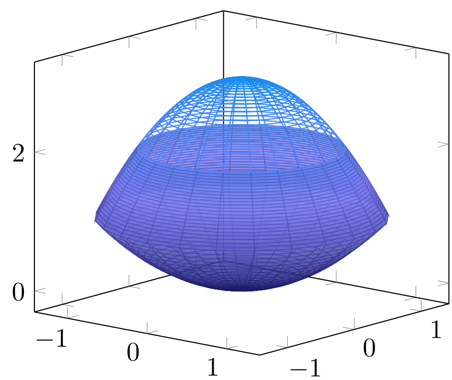


Figura 9: Región del Ejercicio 860

(b) Por otro lado, hemos indicado que la unión de S y S_3 limita la región encerrada por los dos paraboloides. Si llamamos R a dicha región, por el teorema de la divergencia tendremos

$$-\iiint_R \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S_3} \mathbf{F}.$$

El signo menos obedece a las orientaciones que hemos usado en S. Por lo tanto podemos encontrar la integral de $\mathbf{F}$ sobre S calculando los otros dos términos. Para la integral sobre R usamos las coordenadas cilíndricas. En efecto

$$\begin{aligned} -\iiint_R \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV &= -\,3\,\mathrm{Volumen}(R) \\ &= -\,3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}r^2}^{3-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = -9\pi. \end{aligned}$$

Para S_3 usamos una parametrización idéntica a la empleada con S_2 pero con límites de integración para r entre 0 y 1. Así llegamos a la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-3r - r^3\right)\, dr\, d\theta = -\frac{7}{2}\pi.$$

De este modo, encontramos que

$$\int_S \mathbf{F} = -9\pi + \frac{7}{2}\pi = -\frac{11}{2}\pi,$$

tal y como habíamos obtenido antes.

861 Calcular la integral de superficie $\displaystyle\int_S (xy^2, x^2y, y)$ siendo S la superficie formada por la unión de

$$\{(x,y,z) : 0 \le z \le 1,\ x^2+y^2 = 1\}$$

y

$$\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ z = \pm 1\}$$

6.6 TEOREMA DE STOKES

■ Verificar el teorema de Stokes para los campos $\mathbf{F}$ y superficies S siguientes:

862 $\mathbf{F} = (-y, x, z)$; S es la porción del cilindro $z = x^2$ interior al cilindro $x^2+y^2 = 4$.

863 $\mathbf{F} = (5y, 3x, z^4)$; S es la porción de $z = x^2+y^2-4x-4y+8$ bajo el plano $z = 5$.

864 $\mathbf{F} = (x, y, z)$; S el grafo de $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

865 $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$; S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Solución 863:

Una parametrización para S se obtiene mediante una traslación de las coordenadas cilíndricas

$$(2 + r\cos\theta, 2 + r\operatorname{sen}\theta, r^2), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{5}.$$

El rotacional de $\mathbf{F}$ es el campo $(0, 0, -2)$. La integral de este rotacional sobre S conduce, después de los cálculos oportunos, a la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (-2r)\, dr\, d\theta = -10\pi.$$

Por el teorema de Stokes, podemos también encontrar este valor mediante la integral de $\mathbf{F}$ sobre la curva frontera de S, parametrizada por

$$(2 + \sqrt{5}\cos\theta, 2 + \sqrt{5}\operatorname{sen}\theta, 5), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto escalar de $\mathbf{F}$ por el vector tangente resulta ser

$$-10\sqrt{5}\operatorname{sen}\theta - 25\operatorname{sen}^2\theta + 6\sqrt{5}\cos\theta + 15\cos^2\theta.$$

La integral de esta expresión sobre el intervalo $(0, 2\pi)$ (recordando las fórmulas del ángulo doble) conduce al valor -10π que coincide con el anterior.

■ Calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\sigma$ para:

866 $\mathbf{F} = (0, -x, 2x + 3y + z^5)$; con C la intersección entre $x + y + z = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

867 $\mathbf{F} = (0, 0, xy)$; con C la intersección de $z = y$ con $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

868 $\mathbf{F} = (xyz, z^2, xz)$; con C la intersección de $z = x^2 + y^2$ con $z = x$.

Solución 867:

Por el teorema de Stokes, podemos encontrar la integral de línea que nos piden integrando el rotacional de $\mathbf{F}$ sobre una superficie cuya frontera sea la curva dada. La elección más sencilla es la región plana en $z = y$ que encierra la curva, es decir,

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1, \quad z = y.$$

Una parametrización de esta superficie es

$$(1 + r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1.$$

El rotacional de $\mathbf{F}$ es $(x, -y, 0)$ mientras que el vector normal asociado a la parametrización es $(0, -r, r)$. De este modo tenemos que encontrar la integral sobre la región en que se mueven los parámetros de la función que proviene del producto escalar del rotacional de $\mathbf{F}$ por el vector normal anterior, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = 0.$$

Luego la integral pedida es nula.

869 Calcular la integral

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F}$$

donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $\mathbf{F} = (x^3, -y^3, 0)$ con orientación exterior. Calcular esta misma integral si S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$.

870 Usando el teorema de Stokes evaluar la integral de $\mathbf{F} = (xy, yz, xz)$ sobre la curva C formada por los tres segmentos de recta que unen los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

Solución 870:

Mediante el teorema de Stokes podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{F},$$

donde S debe ser una superficie cuya frontera es la curva C. En el caso concreto que nos ocupa, la superficie S es el trozo de plano (triángulo) limitado por los vértices dados. Dicha superficie tiene parametrización

$$(x, y, 3(1 - y - \tfrac{x}{2})), \quad 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 1 - \tfrac{x}{2}.$$

El vector normal asociado a esta parametrización es constante $(\frac{3}{2}, 3, 1)$ y el rotacional de $\mathbf{F}$ es el campo $(-y, -z, -x)$. Así pues la integral que buscamos se escribe

$$\int_0^2 \int_0^{1-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{15}{2} y - \frac{7}{2} x + 9 \right) dy\, dx.$$

Después de unos cuantos cálculos, se llega al valor de esta integral que es $\frac{25}{6}$.

871 Supongamos que S_1 y S_2 son dos superficies con la misma frontera C. Probar que

$$\int_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{F}$$

Aplicar esta idea para evaluar la integral

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F}$$

siendo S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$, con $\mathbf{F} = (-z, -z, 0)$.

872 Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

(a) Mostrar que la integral de $\mathbf{F}$ sobre el círculo unitario $C = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ vale 2π. Concluir que $\mathbf{F}$ no puede ser conservativo.

(b) Comprobar sin embargo que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. ¿Qué falla para este $\mathbf{F}$?

873 Sea C la curva intersección de las superficies $x+y+z = 0$ y $x^2+y^2+z^2 = 1$, y $\mathbf{F}$ el campo (z, x, y). Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}$.

Solución 873:

Por el teorema de Stokes, la integral que deseamos calcular puede encontrarse integrando el rotacional de $\mathbf{F}$, que es el vector constante $(1, 1, 1)$ sobre una superficie cualquiera (lo más sencilla posible) cuya frontera sea precisamente la curva C. Nótese la relación de este problema con el 871. Indudablemente la superficie más sencilla que podemos elegir es

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Nótese que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z \geq 0,$$

es también una elección correcta.

Como la superficie que hemos elegido es un trozo de plano, la componente normal del rotacional de $\mathbf{F}$ sobre este plano será el producto escalar

$$(1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \sqrt{3}.$$

De esta suerte la integral que buscamos es

$$\sqrt{3}\, \text{Área}(S).$$

Como S es un círculo máximo de la esfera unitaria, su área es π, y la integral que nos piden vale $\sqrt{3}\pi$.

874 Sea S el helicoide con parametrización

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v), \qquad 0 \leq v \leq 2\pi,\ 0 \leq u \leq 1,$$

y el campo $\mathbf{F} = (xy, yz, xz)$. Verificar el teorema de Stokes en esta situación:

(a) Calcula $\displaystyle\int_S \nabla \times \mathbf{F}$ usando la parametrización dada.

(b) Calcula directamente $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}$, donde ∂S es la curva frontera del helicoide.

Solución 874:

En primer lugar, calculamos la integral del rotacional de **F** directamente sobre el helicoide (véase la Figura 10) cuya parametrización nos proporcionan. Tras unos cálculos más o menos directos, desembocamos en la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-u\,\mathrm{sen}^2\,v + v\cos v - u^2\cos v\right)\,du\,dv$$

cuyo valor es $-\frac{\pi}{2}$, considerando la orientación hacia arriba.

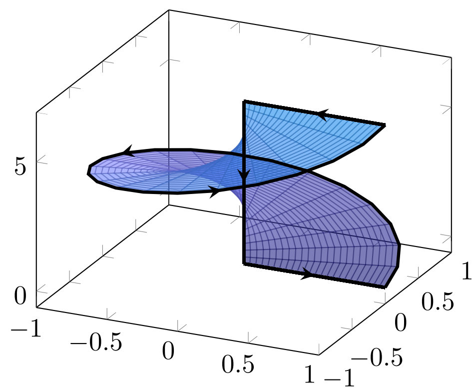


Figura 10: Helicoide del Ejercicio 874

Para comprobar el teorema de Stokes en este ejemplo, debemos tener un poco de cuidado en describir perfectamente la frontera del helicoide. Dicha frontera consta de cuatro partes cuyas parametrizaciones damos a continuación

$$\begin{aligned}
&u = 1 \longrightarrow (\cos v, \mathrm{sen}\,v, v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi,\\
&u = 0 \longrightarrow (0, 0, v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi,\\
&v = 2\pi \longrightarrow (u, 0, 2\pi), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad \text{(mal orientada)},\\
&v = 0 \longrightarrow (u, 0, 0), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \text{(mal orientada)}.
\end{aligned}$$

Se trata por tanto de calcular la integral del campo **F** sobre cada una de estas curvas y sumar los resultados finales. La primera de estas integrales es

$$\int_0^{2\pi}\left(-\cos v\,\mathrm{sen}^2\,v + v\cos v\,\mathrm{sen}\,v + v\cos v\right)\,dv = -\frac{\pi}{2},$$

mientras que las otras tres son trivialmente nulas. Como cabía esperar los resultados coinciden.

875 Para el campo $\mathbf{F} = (yz - y, xz + x, xy)$ y la curva C intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, calcular la integral $I = \int_C \mathbf{F}$.

6 7

POTENCIALES VECTORIALES

- Determinar si existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que:

876 $\nabla \times \mathbf{G} = (xy^2, yz^2, zx^2)$.

877 $\nabla \times \mathbf{G} = (yz, xz, xy)$.

878 Se considera la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2,\ 2z-y \geq 6,\ z \leq 8\}$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (-2z,-1,1)$. Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S con orientación exterior usando el Teorema de Stokes.

Solución 878:

La superficie S es el cono $x^2+y^2 = z^2$ limitado por los planos $2z-y = 6$ y $z = 8$, que puede verse en la Figura 11. Para poder aplicar el Teorema

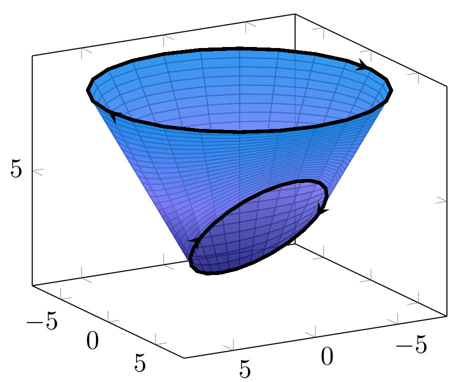


Figura 11: Superficie del Ejercicio 878

de Stokes al cálculo de una integral de superficie tenemos que escribir $\mathbf{F}$ como un rotacional. Esto es posible porque $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Así, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, donde $\mathbf{G}$ es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial G_3}{\partial y} - \dfrac{\partial G_2}{\partial z} & = & -2z \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial z} - \dfrac{\partial G_3}{\partial x} & = & -1 \\[2ex] \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} & = & 1 \end{array}\right\}$$

Si ponemos que $G_3 = 0$, entonces

$$-\frac{\partial G_2}{\partial z} = -2z \Rightarrow G_2 = z^2 + \varphi(x,y)$$

y

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = -1 \Rightarrow G_1 = -z + \psi(x, y).$$

Sustituyendo en la tercera, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 1$. Una posible elección puede ser $\varphi = x$, $\psi = 0$.

Así pues un potencial para $\mathbf{F}$ es $\mathbf{G} = (-z, z^2 + x, 0)$. Entonces,

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{G} = [\text{Stokes}] = \int_{\partial S} \mathbf{G}.$$

La frontera de S está formada por las curvas C_1, la intersección del cono con el plano $z = 8$, y C_2, la intersección del cono con el plano $2z - y = 6$.

C_1 es la circunferencia de radio 8 situada en el plano $z = 8$; una parametrización es

$$\alpha_1(t) = (8\cos t, 8\,\mathrm{sen}\, t, 8), \quad t \in [0, 2\pi]$$

la cual tiene orientación contraria a la que indica el Teorema de Stokes.

Para obtener una parametrización de C_2 eliminamos z de ambas ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = \frac{y}{2} + 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{4}\right)^2 = 1,$$

que parametrizamos como una elipse desplazada sobre el plano $z = \frac{y}{2} + 3$

$$\alpha_2(t) = (\sqrt{12}\cos t, 2 + 4\,\mathrm{sen}\, t, 4 + 2\,\mathrm{sen}\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

que está bien orientada. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} &= -\int_{C_1} \mathbf{G} + \int_{C_2} \mathbf{G} \\ &= -\int_0^{2\pi} (-8, 64 + 8\cos t, 0) \cdot (-8\,\mathrm{sen}\, t, 8\cos t, 0)\, dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \Big[(-4 - 2\,\mathrm{sen}\, t, (4 + 2\,\mathrm{sen}\, t)^2 + \sqrt{12}\cos t, 0) \\ &\quad \cdot(-\sqrt{12}\,\mathrm{sen}\, t, 4\cos t, 2\cos t)\Big]\, dt, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, t\, dt = 0,$$

y que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi,$$

se tiene

$$\int_S \mathbf{F} = (-64 + 6\sqrt{12})\pi.$$

879 Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, 4-y, -z)$ a través de la porción de paraboloide $4 - z = x^2 + y^2$ limitada por $y + z = 4$ y $z = 1$ orientada al exterior, mediante los teoremas de Gauss y Stokes.

Solución 879:

Es muy sencillo comprobar que el campo $\mathbf{F}$ proporcionado tiene divergencia nula, luego admite potenciales vectoriales. Un tal potencial vectorial se encuentra de manera sencilla como

$$\mathbf{G} = ((4 - y)z, -2xz, 0), \quad \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F},$$

sin más que seguir las pautas mostradas en el Ejercicio 878.

Por el teorema de Stokes, podemos escribir

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{G} = \int_{\partial S} \mathbf{G}.$$

La frontera ∂S consta de dos curvas que son

$$x^2 + y^2 = 3, \quad z = 1,$$

y

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}, \; y + z = 4,$$

(véase la Figura 12) con parametrizaciones respectivas

$$(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$(\tfrac{1}{2}\cos\theta, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta, \tfrac{7}{2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

la segunda de ellas mal orientada.

La integral de $\mathbf{G}$ sobre ∂S consta de estas dos contribuciones que son

$$\int_0^{2\pi} \left(-4\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta - 6\cos^2\theta\right) d\theta = -3\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{7}{2} - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) - \frac{1}{2}\cos^2\theta\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\right] d\theta = 0,$$

llegando así al resultado final de -3π.

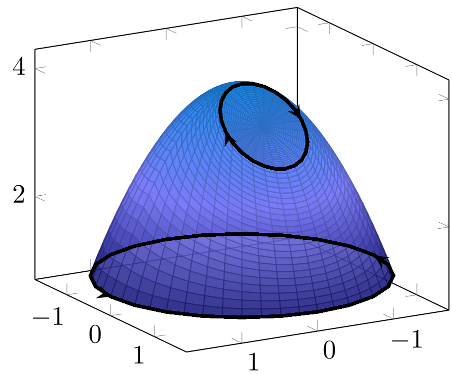


Figura 12: Gráfica del Ejercicio 879

880 Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, y la superficie S (porción de un toro), parametrizada por

$$\Phi(u, v) = ((2 - \cos(u))\cos(v), (2 - \cos(u))\,\mathrm{sen}(v), \mathrm{sen}(u)),$$

$u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F}$ orientada al exterior.

Solución 880:

La superficie S es un toro al que se le ha quitado un trozo (véase la Figura 13). Si le añadimos las tapas S_1 y S_2, orientadas exteriormente, entonces tendremos una superficie cerrada, que encierra un volumen D a la que poder aplicar el teorema de Gauss. Así pues:

$$\int_S \mathbf{F} + \int_{S_1} \mathbf{F} + \int_{S_2} \mathbf{F} = \iiint_D \mathrm{div}\,\mathbf{F}\, dV$$

Como $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$, sólo habrá que calcular las integrales sobre S_1 y S_2.

Parametrizamos S_1; se trata de un círculo situado en el plano $y = 0$, (el correspondiente a $v = 0$ en la parametrización de S) de centro $(2, 0, 0)$ y radio 1. Una parametrización es:

$$\Phi_1(r, t) = ((2 - r\cos t), 0, r\,\mathrm{sen}\,t), \quad r \in [0, 1],\ t \in [0, 2\pi].$$

La normal unitaria exterior a S_1 es el vector $\mathbf{N}_1 = (0, -1, 0)$. Entonces,

$$\int_{S_1} \mathbf{F} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = \int_{S_1} -z\, dS$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2\,\mathrm{sen}\,t\, dr\, dt = 0.$$

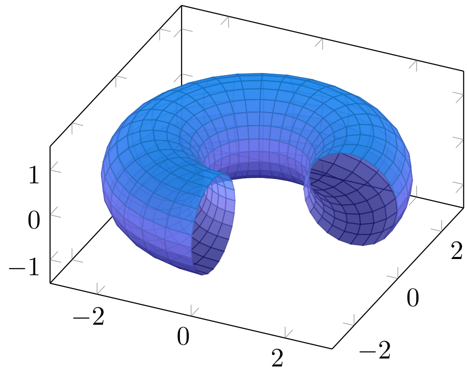


Figura 13: Ejercicio 880: porción de toro

Del mismo modo, S_2 es un círculo situado en el plano $x = 0$ (correspondiente a $v = \frac{3\pi}{2}$) de centro $(0, -2, 0)$ y radio 1, cuya parametrización viene dada por:

$$\Phi_2(r, t) = (0, -(2 - r\cos t), r \operatorname{sen} t), \quad r \in [0, 1], \ t \in [0, 2\pi]$$

La normal exterior a S_2 es $\mathbf{N}_2 = (1, 0, 0)$ y por tanto:

$$\int_{S_2} \mathbf{F} = \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 = \int_{S_2} y \, dS$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r\cos t - 2) \, dr \, dt = -2\pi.$$

Conclusión: $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = 2\pi.$

881 Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3 = \sqrt{x^2 + y^2}, \, z \leq 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 - z, \, 0 \leq z \leq 5\}$. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$, calcular $\int_S \mathbf{F}$ orientada al exterior:

(a) Directamente.

(b) Mediante el teorema de Gauss.

(c) Mediante el teorema de Stokes.

Solución 881:

Dejamos al lector el cálculo directo de la integral. Obsérvese que el campo $\mathbf{F}$ tiene divergencia nula. Aunque la superficie S no es cerrada, puede añadírsele el disco

$$S' = \{x^2 + y^2 \leq 4, \, z = 5\}$$

de modo que $S \cup S'$ encierra en su interior la región R (Figura 14). Por el teorema de la divergencia

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S'} \mathbf{F} = \int_S \mathbf{F} + \int_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}.$$

Como S' es un trozo de plano, la normal unitaria exterior $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$

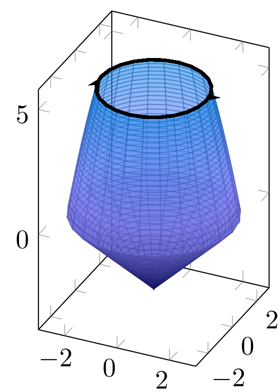


Figura 14: Superficie del Ejercicio 881

y por tanto

$$\int_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \int_{S'} (-2z) = -10\, \text{Área}(S') = -40\pi.$$

Por otro lado, debido de nuevo a que $\mathbf{F}$ tiene divergencia nula, podemos encontrar un campo $\mathbf{G}$ cuyo rotacional es $\mathbf{F}$. Así, por el teorema de Stokes, tenemos

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{G} = \int_{\partial S} \mathbf{G}.$$

Un tal campo $\mathbf{G}$ es fácil de encontrar (cf. Ejercicio 878), por ejemplo,

$$\mathbf{G} = (0, -2xz, -xy).$$

Existen infinitas otras posibilidades igualmente válidas.

La frontera ∂S consta de una sola curva $z = 5$, $x^2 + y^2 = 4$ con parametrización

$$(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 5), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La integral de $\mathbf{G}$ sobre ∂S es por tanto

$$\int_0^{2\pi} (-40\cos^2\theta)\, d\theta = -40\pi.$$

882 Consideremos la superficie M en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones:

$$z = x + y, \quad y^2 \leq x, \quad x^2 \leq 2y.$$

Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ definido en todo $\mathbb{R}^3$. Calcula el flujo de $\mathbf{F}$ a través de M orientado hacia el exterior,

(a) Directamente.

(b) Mediante el teorema de Gauss.

(c) Mediante el teorema de Stokes.

883 Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ a través de la superficie S dada por

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

directamente y mediante el Teorema de Stokes.

884 Denotemos por S el casquete de elipsoide

$$\left\{2(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1,\ 1 \leq 2\sqrt{2}x \leq 2\right\}$$

y $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$. Calcula la integral $I = \int_S \mathbf{F}$ usando de algún modo:

(a) El teorema de la divergencia.

(b) El teorema de Stokes.

Solución 884:

En primer lugar observamos que el campo $\mathbf{F}$ tiene divergencia nula. Si completamos el casquete dado con las dos tapas correspondientes a $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (S_1) y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (S_2) tenemos una superficie cerrada que encierra una parte sólida del elipsoide R. Luego

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F} + \int_{S_1} \mathbf{F} + \int_{S_2} \mathbf{F}.$$

Como estas dos últimas integrales tienen normales unitarias exteriores $(-1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente, sus integrales se calculan inmediatamente. En efecto

$$\int_{S_1} \mathbf{F} = \int_{S_1} (-x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Área}(S_1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\pi\left(\sqrt{2} - \frac{5}{4}\right),$$

pues S_1 es el círculo en el plano $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $(y+1)^2 - z^2 \leq \sqrt{2} - \frac{5}{4}$. Del mismo modo,

$$\int_{S_2} \mathbf{F} = \int_{S_2} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Área}(S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

con S_2 el círculo en el plano $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(y+1)^2+z^2 \leq 2(\sqrt{2}-1)$ Finalmente

$$\int_S \mathbf{F} = \frac{\pi}{16}\left(40 - 21\sqrt{2}\right).$$

Por otro lado, si $\mathbf{G}$ es un potencial vectorial para $\mathbf{F}$, tendremos como en casos anteriores que

$$\int_S \mathbf{F} = \int_{\partial S} \mathbf{G},$$

donde una elección ventajosa de $\mathbf{G}$ es $(yz, -xz, 0)$. La frontera ∂S consta de dos curvas que son

$$(y+1)^2 + z^2 = \sqrt{2} - \frac{5}{4},\ x = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

y

$$(y+1)^2 + z^2 = 2(\sqrt{2}-1),\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Los cálculos involucrados en resolver las integrales de $\mathbf{G}$ sobre estas dos curvas son estándar y se han realizado ya en algunas ocasiones. Dejamos al lector el comprobar que el resultado final coincide con el ya obtenido anteriormente.

885 Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cortada por el cono $z^2 = 4x^2 + (2y-1)^2$, $z \geq 0$, orientada con la normal exterior, y el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Calcula el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S directamente y mediante el teorema de Stokes.

886 Consideremos la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq z \geq 0\}$ y el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, x, -z)$. Calcular el flujo de F a través de M, con orientación exterior:

(a) Usando el Teorema de Gauss.

(b) Usando el Teorema de Stokes.

Solución 886:

(a) La superficie S es la pared cilíndrica limitada por $y \geq z \geq 0$, como puede verse en la Figura 15. Como no es una superficie cerrada necesitamos cerrarla para aplicar el Teorema de Gauss. Consideramos las superficies S_1 y S_2 correspondientes a las tapas (inferior y superior, respectivamente) que cierran S, y sea D el volumen encerrado por la unión de estas tres superficies. Entonces, si suponemos orientación exterior en cada una de las superficies, el Teorema de Gauss afirma que:

$$\int_S \mathbf{F} + \int_{S_1} \mathbf{F} + \int_{S_2} \mathbf{F} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 0,$$

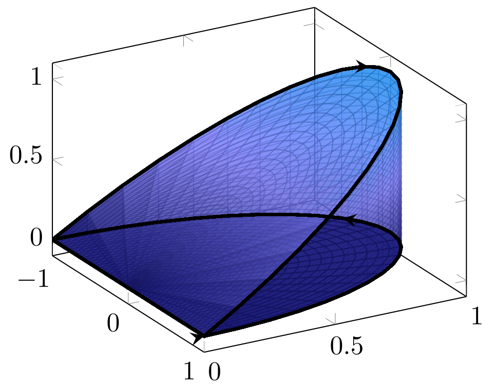


Figura 15: Cuña cilíndrica del Ejercicio 886

pues $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, como se comprueba fácilmente.

Por tanto,

$$\int_S \mathbf{F} = -\int_{S_1} \mathbf{F} - \int_{S_2} \mathbf{F}.$$

Puesto que S_1 es una superficie plana, para calcular $\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot dS$ usaremos $\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1$, donde $\mathbf{N}_1$ es la normal unitaria exterior a S_1. Dicho vector es $\mathbf{N}_1 = (0, 0, -1)$, y entonces,

$$\int_{S_1} (x, x, -z) \cdot (0, 0, -1) = \int_{S_1} z = 0 \quad \text{pues } z = 0 \text{ sobre } S_1.$$

Del mismo modo, puesto que S_2 está sobre el plano $y = z$, su normal unitaria exterior es $\mathbf{N}_2 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, luego

$$\int_{S_2} (x, x, -z) \cdot (0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_2} (x + z).$$

Para calcular esta integral usamos una parametrización de S_2,

$$\Phi(r, t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, r\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, \pi],\ r \in [0, 1].$$

El vector normal asociado a la parametrización es $\mathbf{n}(r, t) = (0, -r, r)$ y su norma vale $\sqrt{2}r$. Por tanto,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{S_2} (x + z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{2}r^2(\cos t + \operatorname{sen} t)\, dt\, dr = -\frac{2}{3}$$

Conclusión $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = \frac{2}{3}$.

(b) Para aplicar el Teorema de Stokes debemos tener en cuenta que $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ implica que existe $\mathbf{G}$ tal que $\nabla\times\mathbf{G}=\mathbf{F}$, luego

$$\int_S \mathbf{F}=\int_S \nabla\times\mathbf{G}=[\text{Stokes}]=\int_{\partial S}\mathbf{G}.$$

Calculando un potencial vectorial para $\mathbf{F}$ obtenemos, entre otras muchas posibilidades $\mathbf{G}=(xz,-xz,0)$.

Parametrizamos ahora la frontera de S, para ello observamos que dicha frontera esta formada por las fronteras de S_1 y S_2. Para S_1 consideramos

$$\begin{aligned}\alpha_1(t)&=(\cos t,\operatorname{sen} t,0)\quad t\in[0,\pi],\\ \alpha_2(t)&=(t,0,0),\quad t\in[-1,1],\end{aligned}$$

que, si la normal a S es exterior, está bien orientada. Para S_2 consideramos

$$\begin{aligned}\beta_1(t)&=(\cos t,\operatorname{sen} t,\operatorname{sen} t),\quad t\in[0,\pi],\\ \beta_2(t)&=\alpha_2(t)\end{aligned}$$

que está mal orientada.

Si calculamos la integral de línea de $\mathbf{G}$ sobre cada una de estas curvas obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}\mathbf{G}&=0\\ \int_{\alpha_2}\mathbf{G}&=\int_{\beta_2}\mathbf{G}=0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\beta_1}\mathbf{G}&=\int_0^{\pi}(\cos t\operatorname{sen} t,-\cos t\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t,\cos t)\,dt\\ &=-\int_0^{\pi}(\cos t\operatorname{sen}^2 t+\cos^2\operatorname{sen} t)\,dt=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_S\mathbf{F}=\int_{\partial S}\mathbf{G}=\int_{\alpha_1}\mathbf{G}+\int_{\alpha_2}\mathbf{G}-\int_{\beta_1}\mathbf{G}-\int_{\beta_2}\mathbf{G}=\frac{2}{3}.$$

887 Considerar la superficie S definida por las ecuaciones

$$S=\{z^2=x^2+y^2,\ x\geq 0,\ 0\leq z\leq 1\},$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(-x+3,x^2,z)$. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S con orientación interior:

(a) Directamente.

(b) Usando el Teorema de Gauss,

(c) Usando el Teorema de Stokes.

Solución 887:

(a) Parametrizamos la superficie S por la función

$$\Phi(r,t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, r) \qquad r \in [0,1],\ t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

El vector normal correspondiente a esta parametrización es

$$\mathbf{n}(r,t) = (-r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\,t, r)$$

cuya orientación es interior. Entonces,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (-r\cos t + 3, r^2\cos^2 t, r)\cdot \mathbf{n}(r,t)\,dr\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(r^2\cos^2 t - 3r\cos t - r^3\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t + r^2\right)\,dr\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{1}{3}\cos^2 t - \tfrac{3}{2}\cos t - \tfrac{1}{4}\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t + \tfrac{1}{3}\right)\,dt = \frac{\pi}{2} - 3.$$

(b) Para usar el Teorema de Gauss debemos previamente cerrar la superficie. Para ello elegimos las superficies (véase la Figura 16)

$$S_1 = \{x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ z = 1\},$$
$$S_2 = \{y^2 \le z,\ x = 0,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Entonces, $S \cup S_1 \cup S_2 = \partial D$, con $D = \{z^2 \ge x^2 + y^2,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le 1\}$. Si consideramos las tres superficies orientadas exteriormente, resulta

$$\int_{S\cup S_1\cup S_2} \mathbf{F} = \iiint_D \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV = 0, \quad \text{pues } \mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0.$$

Luego

$$\int_S \mathbf{F} = -\int_{S_1}\mathbf{F} - \int_{S_2}\mathbf{F}$$

Ahora bien,

$$\int_{S_1}\mathbf{F} = \int_{S_1}(-x+3, x^2, z)\cdot(0,0,1) = \int_{S_1} z = \text{Área}(S_1) = \frac{\pi}{2}.$$

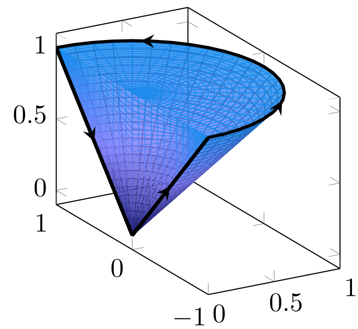


Figura 16: Volumen del Ejercicio 887

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \mathbf{F} &= \int_{S_2} (-x+3, x^2, z) \cdot (-1,0,0) = \int_{S_2} (x-3) \\ &= -3\,\text{Área}(S_2) = -3\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = \frac{\pi}{2} - 3$, con orientación interior.

(c) Para aplicar el Teorema de Stokes debemos previamente calcular un potencial vectorial, de manera que

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{G} = \int_{\partial S} \mathbf{G}.$$

Para calcular $\mathbf{G}$ resolvemos el sistema correspondiente, obteniendo, por ejemplo

$$\mathbf{G} = (x^2 z, (x-3)z, 0).$$

La frontera de S se puede descomponer en tres partes

$$\begin{aligned} C_1 &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \text{bien orientada,} \\ C_2 &= (0, t, t) \quad t \in [0,1] \quad \text{mal orientada,} \\ C_3 &= (0, -t, t) \quad t \in [0,1] \quad \text{bien orientada.} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{G} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{sen} t \cos^2 t + (\cos t - 3)\cos t)\, dt \\ &= \left[\frac{\cos^3 t}{3} - 3 \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -6 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{C_2} \mathbf{G} = \int_0^1 -3t\,dt = -\frac{3}{2}$$

$$\int_{C_3} \mathbf{G} = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{G} = -6 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2} - 3.$

888 Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, z, y)$ y la superficie S definida mediante las condiciones $x^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $0 \leq y \leq 1$, y dotada con la orientación normal exterior. Se pide calcular la integral de superficie $\int_S \mathbf{F}$ de las siguientes formas:

(a) Directamente.

(b) Empleando el Teorema de Stokes.

SOLUCIONES

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 0

0 1 Repaso de geometría del plano y el espacio

1 No.

3 Sí.

5 $y = x + 8$.

6 $4y = 5x - 7$.

8 $2x + 3y = -5$.

9 No.

11 Sí.

12 Sí.

14 $x = 3 - 4t$, $y = 9t - 4$, $z = 1 + t$.

15 $x = t$, $y = 1 - t$, $z = t$.

16 $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 3 - t$.

17 $(x, y, z) = (0, 1, 6) + t(-1, \sqrt{2}, -8)$.

18 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 2, 3)$.

19 $(x, y, z) = (\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, 0) + t(-1, 23, 5)$.

20 $x - y + 3z + 1 = 0$.

21 $x - 5z = -33$.

22 $x = 2$.

23 $2y + 3z = 23$.

24 $3x + 2y + 6z = 4$.

26 $P = (0, 0, 3)$, $\mathbf{n} = (3, 0, 1)$.

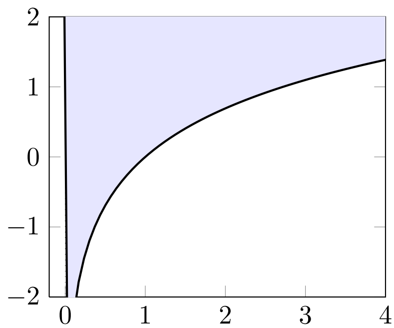
27 $P = (5, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$.

28 $P = (0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.

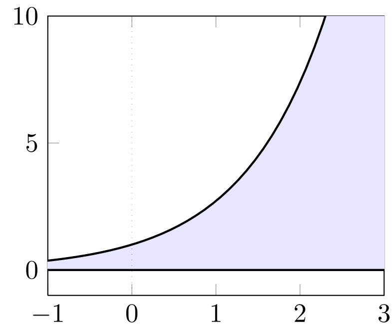
29 $P = (0,1,0)$, $\mathbf{n} = (2,1,-1)$.
30 $2x + y + 2z = 7$.
31 $y + z = 1$.
33 $x - y + 2 = 0$.
34 $30x + y - 23z + 86 = 0$.
36 $(0,0,1)$.
37 $(3,-2,-1)$.
38 $(0,1,3)$.
39 $(-2,1,5)$,
41 $(1,4,-17)$.
42 $z = 3$.
43 $x = -1$.
46 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.
47 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, paralelo al eje Z.
49 $(0,0,0)$.
50 Paralelos.
51 Perpendiculares.
52 $\frac{8}{\sqrt{35}}$.
55 Véase la Figura 6.17(a).
56 Véase la Figura 6.17(b).
58 Exterior de la circunferencia unidad, incluida la frontera.
60 Véase Ejercicio 61.
62 Cilindro de eje X y radio 2.
63 Grafo de la función $y = \frac{1}{x}$
65 Véase la Figura 6.17(c).

0 2 Cónicas y cuádricas

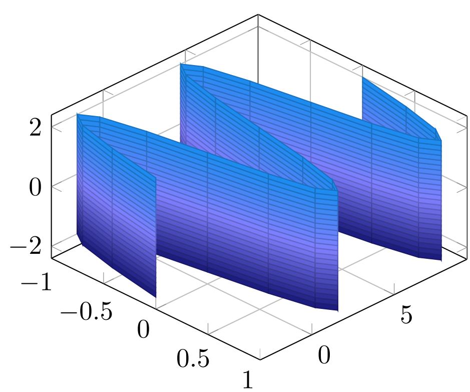
66 Elipse $(\frac{x}{6})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$ de centro $(0,0)$, vértices $(\pm 6, 0)$ y $(0, \pm 2)$. Focos en $(\pm\sqrt{32}, 0)$.
67 Circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ de centro $(1,0)$ y radio 1.
70 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $3X^2 + Y^2 = 8$) con focos en $(\mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}})$.
71 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{6}$ (ecuación girada $\frac{16}{3}X^2 + 3Y^2 = 48$) con focos en $(\mp\frac{\sqrt{5}}{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2})$.
72 Hipérbola de centro $(0,0)$, vértices $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ y focos en $(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$.



(a) Ejercicio 55



(b) Ejercicio 56



(c) Ejercicio 65

Figura 17: Grafos de funciones

73 Hipérbola de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $X^2-Y^2=4$), vértices $(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$ y focos en $(\pm 2,\pm 2)$.

74 Parábola $\frac{1}{6}(x+1)^2=(y+3)$ de vértice $(-1,-3)$, foco $(-1,-\frac{3}{2})$ y directriz $y=-\frac{9}{2}$.

75 Elipse de centro $(0,0)$, ángulo de rotación $\frac{\pi}{4}$ (ecuación girada $X^2+3Y^2=4$) con focos $(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}})$.

76 Dos rectas que se cortan en el origen con ángulo α, tal que $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{5}$ (ecuación girada $-7X^2+18Y^2=0$).

78 $x^2=16y$.

79 $y^2=14(x-\frac{1}{2})$.

81 $4(y+1)=x^2$.

82 Focos $(0,\pm\frac{6}{5})$; parábolas $y=\pm\frac{5}{24}x^2$.

84 Véase el Ejercicio 85.

86 Véase el Ejercicio 85.

87 Usar 86 y que la ecuación de la tangente a una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Puntos de corte $(\pm\sqrt{8}, \pm 2)$.

88 Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x$ y la tangente viene dada en el Ejercicio 87; basta intersectar ambas rectas y comprobar lo pedido.

89 Para la parábola $y = 4cx$, su foco es $F = (c, 0)$, su directriz $x = -c$ y la tangente viene dada en el Ejercicio 85. Con estos datos $Q = (-c, \frac{2c}{y_0}(x_0 - c))$. Finalmente comprobar que $FP \cdot FQ = 0$.

90 Si situamos la parábola con vértice en el origen y eje Y, el foco se sitúa en el punto $(0, \frac{1}{20})$.

91 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, $(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$.

92 Elipsoide de centro el origen (véase Figura 6.18(a)).

93 Hiperboloide de dos hojas con secciones elípticas perpendiculares al eje Z; (véase Figura 6.18(b))

94 Hiperboloide de una hoja de revolución respecto del eje Y (véase Figura 6.18(c)).

95 Paraboloide elíptico de eje Z (véase Figura 6.18(d)).

96 Dos planos que se cortan en el eje Y.

97 Cilindro elíptico de eje Z.

98 Paraboloide de revolución de eje Z y vértice en $(0, 0, -4)$.

99 Paraboloide hiperbólico de centro el origen.

100 Elipsoide de centro $(0, -1, -1)$ y ecuación $x^2 + 2(y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 3$.

101 Hiperboloide de una hoja de centro $(-2, 1, 0)$ y ecuación $(x + 2)^2 + 2(y - 1)^2 - z^2 = 6$.

102 Elipsoide de centro $(1, 0, 0)$ y ecuación $(x - 1)^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

103 Hiperboloide de dos hojas de centro $(-1, 0, -4)$, eje Y, con ecuación $4(x + 1)^2 - y^2 + (z + 4)^2 = -4$.

104 Cono de vértice $(0, 1, 1)$, con eje paralelo a Z de ecuación $9x^2 + (y - 1)^2 - (z - 1)^2 = 0$.

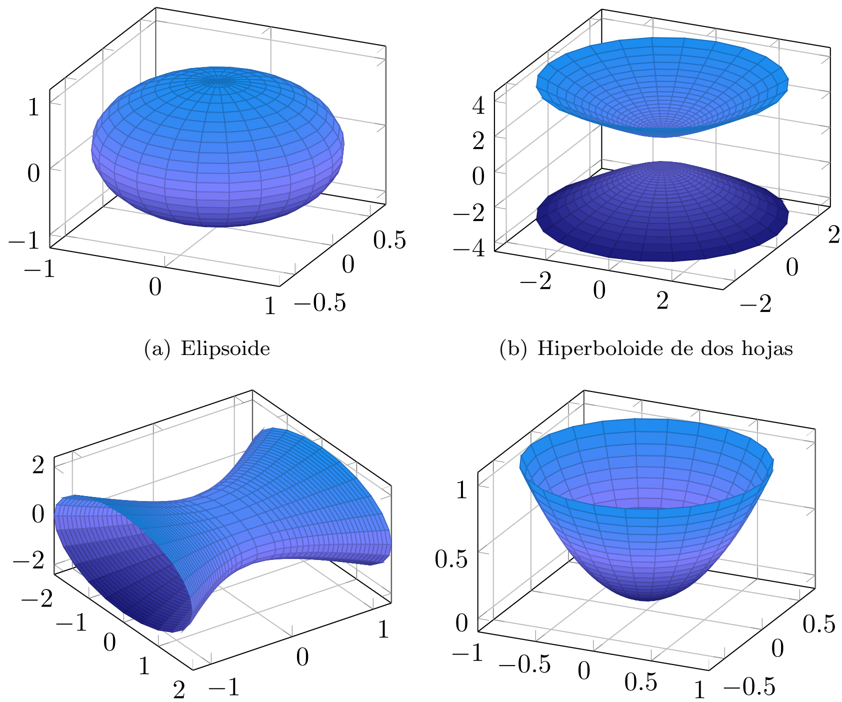
105 Cilindro hiperbólico paralelo al eje X (la hipérbola está girada $\frac{\pi}{4}$).

107 Hiperboloide de dos hojas de centro $(-1, -\frac{3}{2}, -1)$, de eje paralelo a Z y ecuación $2(x + 1)^2 + 3(y + \frac{3}{2})^2 - 4(z + 1)^2 = -\frac{21}{4}$.

109 Hiperboloide de una hoja de centro $(-2, 3, -1)$ y secciones circulares perpendiculares al eje Z de ecuación $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4(z + 1)^2 = 22$.

110 $x^2 + y^2 = 1$.

112 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.



(a) Elipsoide

(b) Hiperboloide de dos hojas

(c) Hiperboloide de una hoja

(d) Paraboloide elíptico

Figura 18: Cuádricas

113 $x^2 + z^2 = 1$.

0 3 Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

114 $(3, \frac{\pi}{2})$.

115 $(2, \frac{\pi}{6})$.

117 $(\sqrt{8}, \frac{5\pi}{4})$.

118 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

119 $(1, \sqrt{3})$.

120 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

122 $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 0)$.

124 $(6, 0, -2)$.

125 $(2, \frac{\pi}{4}, 1)$.

126 $(6, \frac{\pi}{2}, -2)$.

127 $(1, \pi, 3)$.

128 $(0, 1, 0)$.

129 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 4)$.

130 $(0, 0, 6)$.

131 $(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 8)$.

133 $(-2, 0, 3)$.

134 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

135 $(2, 0, \pi)$.

137 $(\sqrt{2}, 0, \frac{\pi}{4})$.

138 $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$.

140 $(0, 1, 0)$.

141 $(0, 0, 2)$.

142 $r = 5$.

144 $r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$.

145 $r = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}$.

146 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(2\theta)}}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

147 $r = \frac{4}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$, $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

148 $x^2 + y^2 = 9$.

149 $y = -x$, $y \geq 0$.

151 $x = 3$.

152 No hay intersección.

154–164 Se muestran las curvas en las Figuras 19 y 20.

165 $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$ es un hiperboloide de una hoja de revolución respecto del eje Z (véase la Figura 21).

166 $r^2 + z^2 = 1$.

167 $\rho \operatorname{sen}\phi = 3$.

168–170 Véase la Figura 22

171 Meridiano de la esfera unidad.

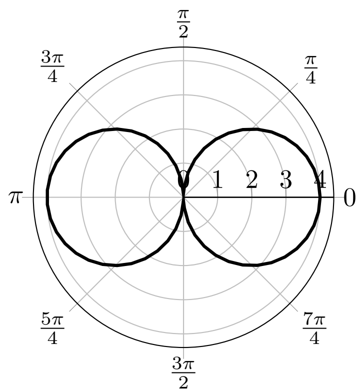
172 $\{0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta},\ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

173 $\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}\} \cup \{\pi \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$.

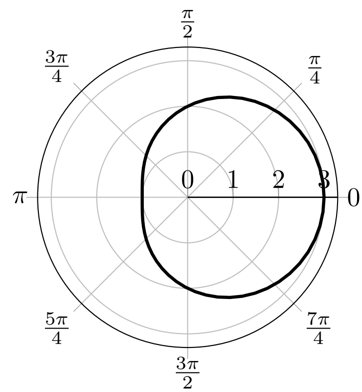
174 (cilíndricas) $z = r\cos\theta$; (esféricas) $\tan\phi\cos\theta = 1$.

175 $z = r$.

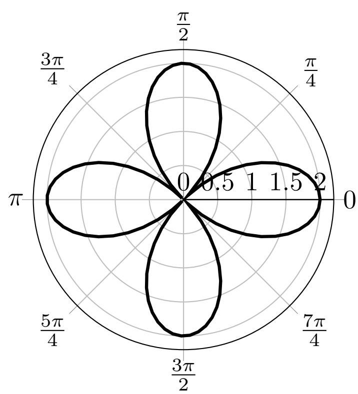
176 $z = r^2$.



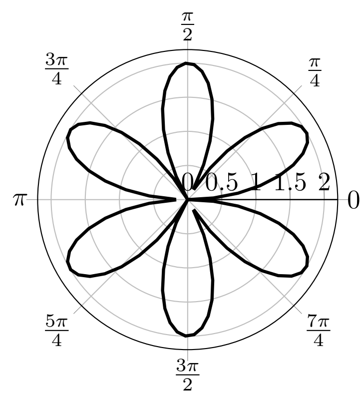
(a) 154



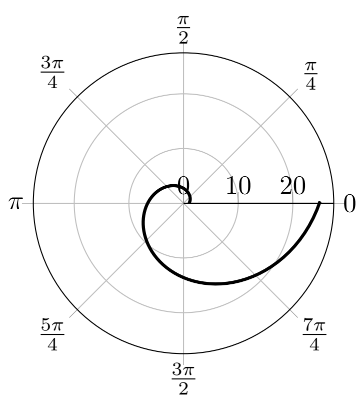
(b) 156



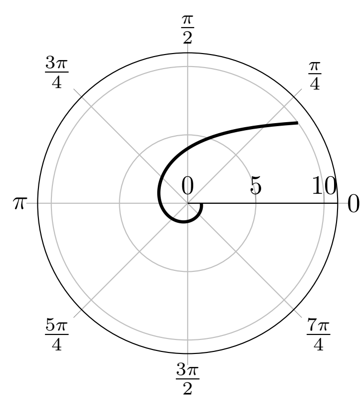
(c) 157



(d) 158

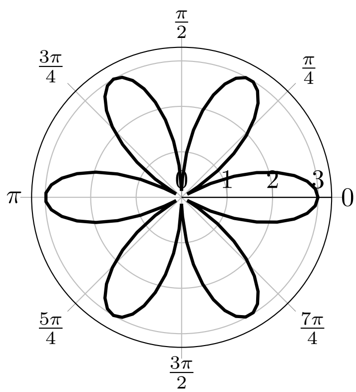


(e) 159

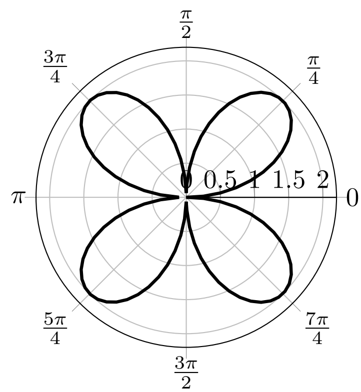


(f) 160

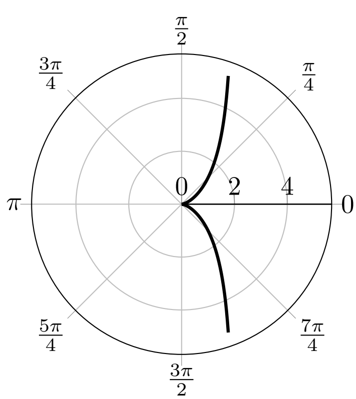
Figura 19: Curvas en polares.



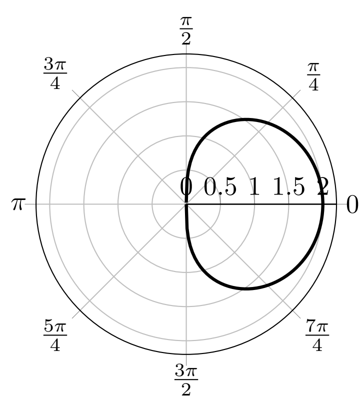
(a) 161



(b) 162



(c) 163



(d) 164

Figura 20: Curvas en polares

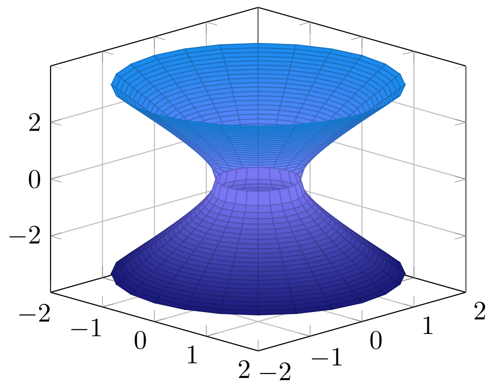


Figura 21: Ejercicio 165: hiperboloide de una hoja

178 $\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

179 $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$.

180 $\{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 1\}$.

181 $\{\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi),\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\} \cup \{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta},\ 0 \leq z \leq 1 - r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\}$.

182 $\{\phi = \arctan\left(\frac{r}{h}\right),\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 + h^2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

183 (cilíndricas) $z = r^2 \cos 2\theta$; (esféricas) $\rho \operatorname{sen}\phi \tan\phi \cos 2\theta = 1$.

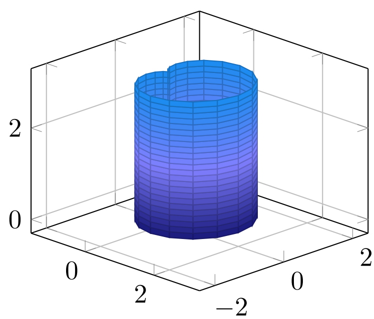
184 Esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2ar\cos\theta$. Esfera de centro $(0, a, 0)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2ar\operatorname{sen}\theta$. Esfera de centro $(0, 0, a)$ y radio a: $r^2 + z^2 = 2az$.

185 En polares: $r =$ constante es una circunferencia de centro el origen y radio r; $\theta =$ constante es una semiplano vertical de origen O y ángulo θ respecto del eje X.

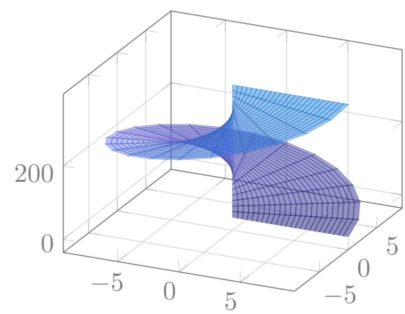
En cilíndricas: $r =$ constante es un cilindro de radio r y eje Z; $\theta =$ constante es un semiplano limitado por el eje Z y ángulo θ respecto de eje X; $z =$ constante es un plano de altura z.

En esféricas: $\rho =$ constante es una esfera de centro el origen y radio ρ; $\theta =$ constante es lo mismo que en cilíndricas; $\phi =$ constante es un semicono de vértice el origen y eje Z, con ángulo ϕ respecto del eje Z.

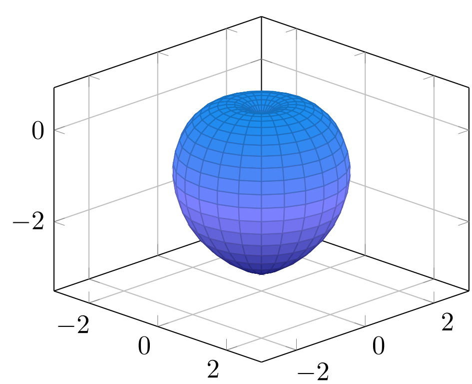
186 Corresponde a una dilatación de centro el origen y razón 2 respecto de la original.



(a) 168 Cilindro cardioideo



(b) 169 Hélice



(c) 170 Cardioide de revolución

Figura 22: Superficies en cilíndricas y esféricas

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 1

1 1 Funciones de varias variables

189 $\mathbb{R}^2 - \{x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

191 $(\{x > 0\} \cap \{x + y \neq 0\}) - \{x = 1\}$.

192 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

194 $[0,2] \times [0,+\infty) \cup [-2,0] \times (-\infty,0]$.

195 $\{x + y > 0\}$.

196 $\{y > 0\}$.

199 $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

200 $\mathbb{R} \times [-1,1]$.

201 $\{x > 0,\ y > 0\}$.

203 $\mathbb{R}^2 - \{x^2 + y^2 = 1\}$ (todo el plano excepto la circunferencia unidad).

204 $\mathbb{R}^3 - \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (todo el espacio menos la superficie de la esfera unidad).

205 $\mathbb{R}^3 - \{x^2 - 4y^2 = 1\}$ (todo el espacio menos el cilindro hiperbólico $x^2 - 4y^2 = 1$).

207 $\mathbb{R}^2 - (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$ (todo el plano excepto los ejes coordenados).

206 $\{(x-1)^2 + y^2 \geq 4\}$ (exterior del círculo de centro $(1,0)$ y radio 2).

208 $\{x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1\} \cap \{y > x^2\}$ (exterior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ que queda dentro de la parábola $y = x^2$).

209 $f(1,0) = 1$, $f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 2$; $\{f(x,y) = 0\} = \{(0,0)\}$; $f(\{x^2+y^2 \leq 4\}) = \{z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 4\}$ (paraboloide circular de vértice el origen limitado por el plano $z = 4$).

210 $f(0,0,0) = 1$, $f(\pm1,\pm1,\pm1) = e^{-3}$; $f(\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}) = e^{-1}$; $f(x,y,z) \to 0$ si $\|(x,y,z)\| \to \infty$.

211 Grafos de funciones de la forma $y = |x| - k$.

212 Curvas de la forma $x = |y| + k$.

214 Para $k = 0$ el eje Y; en otro caso circunferencias de centro $(\frac{1}{k}, 0)$ y radio $\frac{1}{|k|}$. Hay que excluir el origen de coordenadas.

215 Para $k = 0$ el eje X; en otro caso circunferencias de centro $(0, \frac{1}{k})$ y radio $\frac{1}{|k|}$. Hay que excluir el origen de coordenadas.

217 Para $k = 0$ par de rectas $x = 1$, $y = 2$; para $k \neq 0$ hipérbolas de centro $(1,2)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$ (ecuación reducida $(X - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 - (Y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2k$).

218 Para $k = 0$ el origen; para $k > 0$ elipses de centro el origen y ejes paralelos a los coordenados; $\emptyset$ en otro caso.

219 Para $k = 0$ los ejes coordenados; para $k \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dos rectas que se cortan en el origen; para $k = \frac{1}{2}$ la recta $y = x$ y para $k = -\frac{1}{2}$ la recta $y = -x$; $\emptyset$ en otro caso (ecuación $(k - \frac{1}{2})x^2 + (k + \frac{1}{2})y^2 = 0$). Hay que excluir el origen de coordenadas.

220 Para $k = 1$ el eje X; para $k = -1$ el eje Y; para $k < -1$ ó $k > 1$ dos rectas que se cortan en el origen; $\emptyset$ en otro caso (ecuación reducida $(1 - k)x^2 + (1 + k)y^2 = 0$). Hay que excluir las rectas $y = x$ e $y = -x$.

221 Para $k > 0$ esferas de centro el origen y radio $\frac{1}{\sqrt{k}}$; $\emptyset$ en otro caso.

222 Parábolas de vértice $(k, 0)$ y eje X, $y^2 = -(x - k)$.

223 Para $k = 0$ los ejes coordenados; en otro caso, la parte positiva de la función $y = \frac{k^2}{x^2}$.

224 Para $k \leq 0$, $\emptyset$; para $k > 0$ grafo de funciones $y = \frac{\log k}{x}$.

226 Rectas $y = kx$.

228 (a) Son circunferencias de centro el origen y radio $\frac{-1}{\log \alpha}$ (véase la Figura 6.25(a)).
(b) No existen curvas de nivel.
(c) Grafo de la función $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
(d) Para el plano $y = cx$ la sección es la curva $e^{-\frac{1}{x^2(1+c^2)}}$.
(e) Véase la Figura 6.25(b).

229 $f(x, y) = y - \operatorname{sen} x + 1$.

230 $f(x, y) = y - \sqrt{x^6 + \log^6 x} - 7$.

231 $f(x, y) = y^4 x + x^3 y + 121$.

232 $f(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 < 1$, $f(x, y) = 1$, en caso contrario.

233 El dominio es el mismo. El grafo corresponde al original, desplazado en la dirección del vector $(0, 0, k)$.

234 Dominio $\{(x_0, y_0) + U\}$. Grafo desplazado en la dirección del vector $(x_0, y_0, 0)$.

235 Dominio $\{(x, y) : (-x, -y) \in U\}$. Rotación de eje Z y ángulo π.

236 Mismo dominio. Simetría respecto del plano $z = 0$.

237–240 Véase la Figura 26.

247 $x = 2y^2 + 2z^2$. Paraboloide circular de eje X.

248 $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$. Elipsoide de centro el origen.

249 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Hiperboloide de una hoja de eje Z.

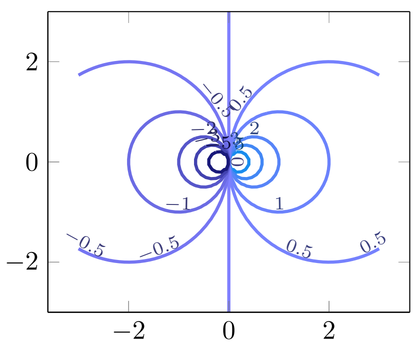
250 $z^2(x^2 + y^2) = 1$.

251 $z^2 = 4x^2 + 4y^2$. Cono de eje Z y vértice en el origen.

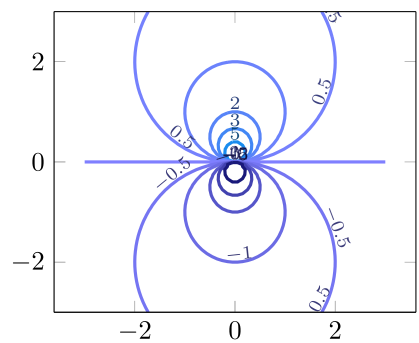
252 $4x^2 = y^2 + z^2$. Cono de eje X y vértice en el origen.

253–264 Véanse las Figuras 27 y 28.

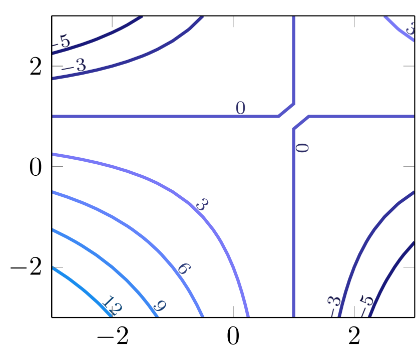
265 Planos $x + y + z = c$.



(a) Ejercicio 214

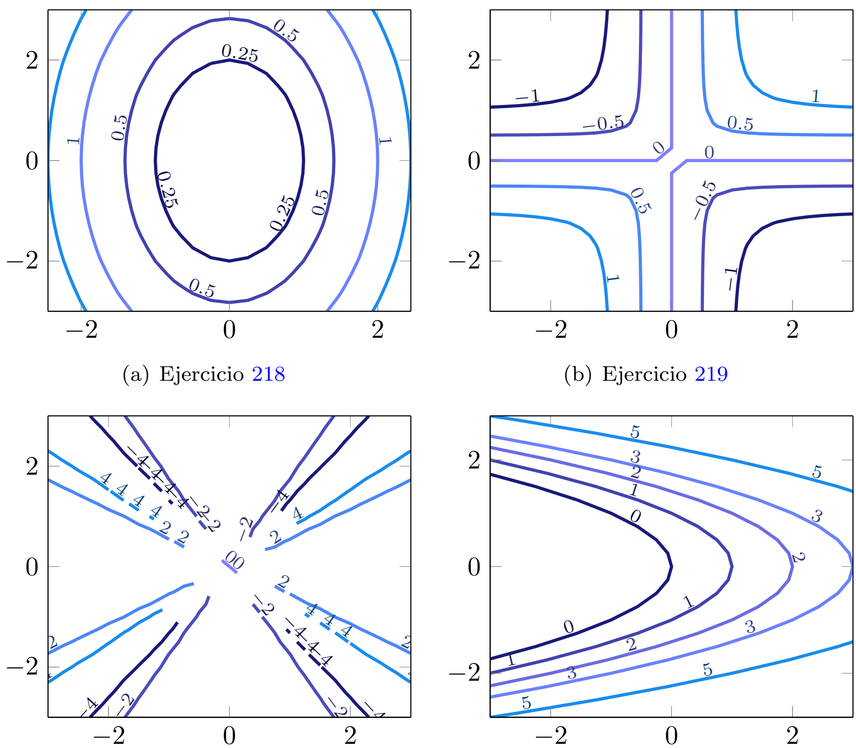


(b) Ejercicio 215



(c) Ejercicio 217

Figura 23: Curvas de nivel



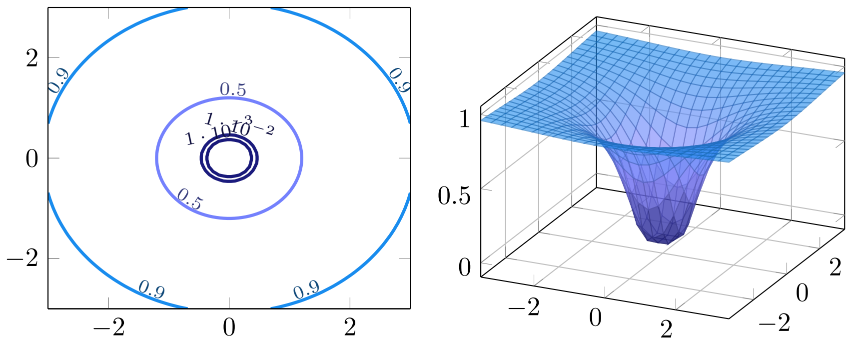
(a) Ejercicio 218

(b) Ejercicio 219

(c) Ejercicio 220

(d) Ejercicio 222

Figura 24: Curvas de nivel



(a) Curvas de nivel (b) Grafo de $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$

Figura 25: Ejercicio 228

266 Para $c > 0$ esferas de centro el origen y radio $\sqrt{c}$; para $c = 0$ el origen; $\emptyset$ en otro caso.

267 Para $c > 0$ hiperboloides circulares de una hoja de eje Z; para $c = 0$ cono circular recto; para $c < 0$ hiperboloides circulares de dos hojas de eje Z.

268 Paraboloides circulares de eje X y vértice en $(c, 0, 0)$; $x - c = -(y^2 + z^2)$.

1 2 Límites y continuidad

269 0.

270 1.

272 1 (polares).

273 $\nexists$ (iterados distintos).

274 $\nexists$ (iterados distintos).

276 $\nexists$ (direcciones $y = x^2$, $x = 0$).

277 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).

278 0 (polares).

279 1 (polares).

280 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).

281 e (polares).

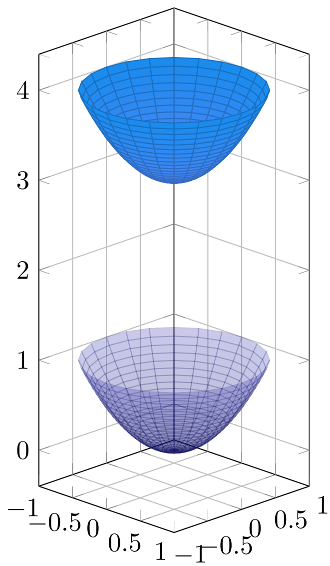
282 $\nexists$ (direcciones $y = x^\alpha$ con $\alpha = \frac{2}{3}$).

283 $\nexists$ (direcciones $y = x^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{2}$).

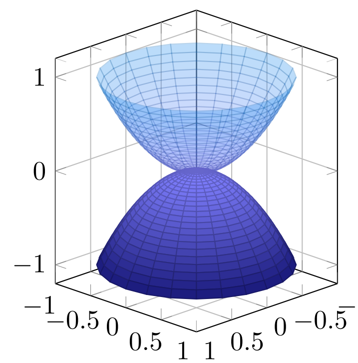
284 0 (polares).

285 0 (usar Ejercicio 279).

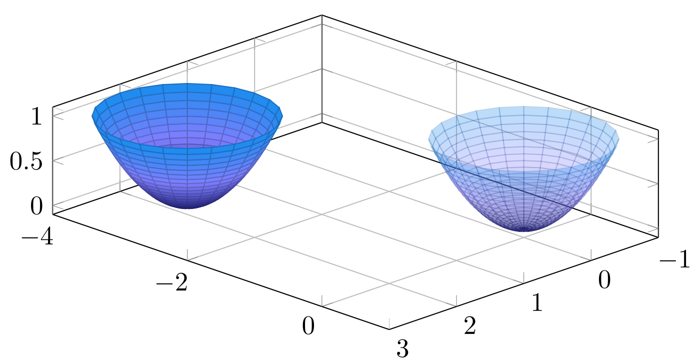
286 $\nexists$ (existe un unidimensional pero no el reiterado).



(a) Ejercicio 237

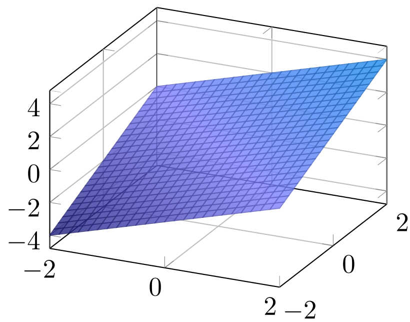


(b) Ejercicio 240

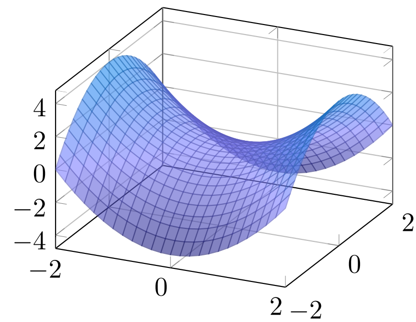


(c) Ejercicio 238

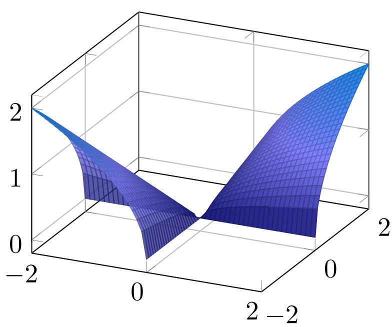
Figura 26: Ejercicios 237–240



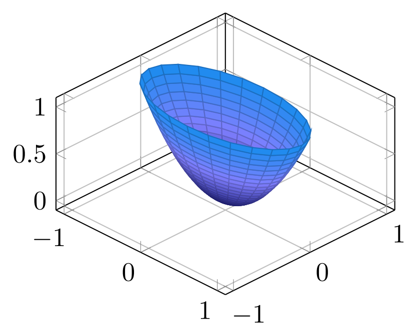
(a) 253



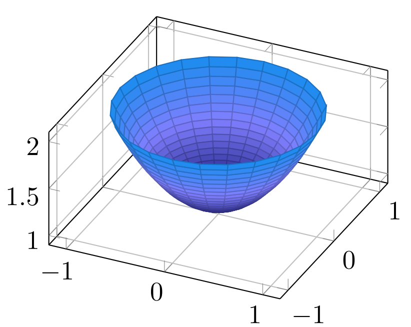
(b) 254



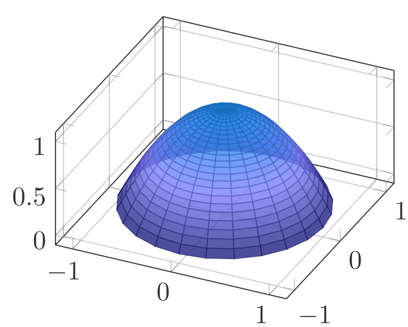
(c) 255



(d) 256

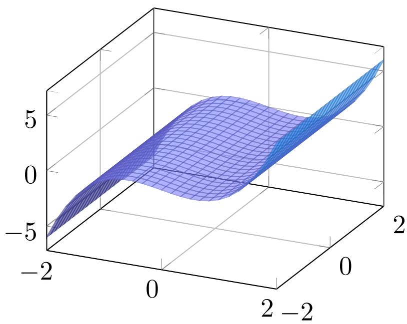


(e) 257

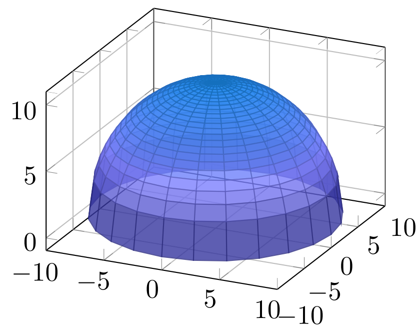


(f) 258

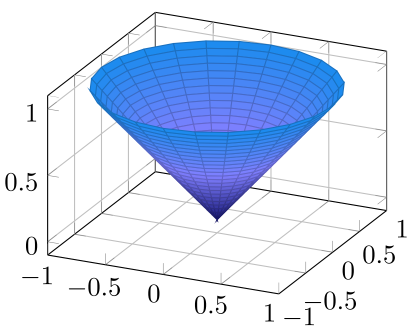
Figura 27: Grafos de funciones



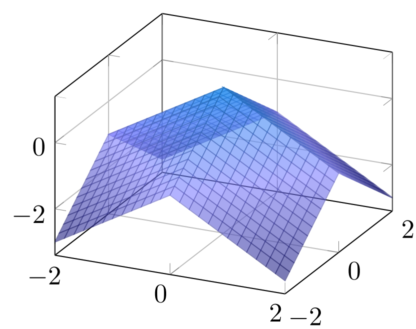
(a) 259



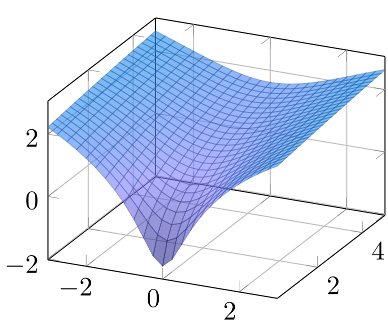
(b) 260



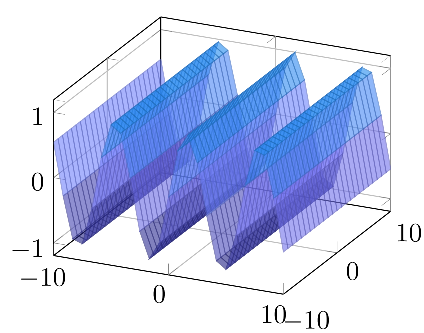
(c) 261



(d) 262



(e) 263



(f) 264

Figura 28: Grafos de funciones.

287 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).

288 $\nexists$ (direcciones $y = mx$).

290 0 (dividir el numerador por $x + y^2$).

291 0 (polares).

292 ∞.

294 0 (polares).

297 $\nexists$ (direcciones $y = z = 0$, $x = z = 0$).

298 $\nexists$ (direcciones $y = z = x$, $y = z = -x$).

299 0 (usar coordenadas esféricas).

300 Continua en $\{2x + 3y > 0\}$.

301 Continua en $\{x^4 - y^4 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

302 Continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

303 Continua en $\mathbb{R}^2$.

305 Continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

306 Continua en $\mathbb{R}^2 - \{4x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$.

307 Continua en $\mathbb{R}^2 - (\{x = 0\}) \cup \{(0,1)\}$.

308 Continua en $\mathbb{R}^2 - (\{x < -2\} \cup \{(0,0)\})$.

310 Sí, definiendo $f(0,0) = 0$.

311 Aplicar la definición de continuidad de f para $y = y_0$.

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 2

2 1 Derivadas parciales

312 $f_x = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$, $f_y = 2xye^{x^2+y^2}$.

313 $f_x = -\frac{y}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(y\sqrt{x})\operatorname{sen}(x\sqrt{y}) + \sqrt{y}\cos(y\sqrt{x})\cos(x\sqrt{y})$,
$f_y = -\sqrt{x}\operatorname{sen}(y\sqrt{x})\operatorname{sen}(x\sqrt{y}) + \frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(y\sqrt{x})\cos(x\sqrt{y})$.

314 $f_x = 14x + \tan x$, $f_y = \tan y$.

315 $f_x = \frac{1}{y}$, $f_y = -\frac{x}{y^2}$.

316 $f_x = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$, $f_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$.

317 $f_x(\frac{2\pi}{b},0) = ae^{\frac{2\pi a}{b}}$, $f_y(\frac{2\pi}{b},0) = 0$.

318 $f_x(c,\frac{c}{2}) = 2^c c^{\frac{3}{2}c} - c^{3c}\log(c^3)$, $f_y(c,\frac{c}{2}) = 2^c c^{\frac{3}{2}c}\log(4c^3) - 4c^{3c}$.

319 $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 1$.

320 $f_x(-1,2) = -\frac{3}{49}$, $f_y(-1,2) = -\frac{12}{49}$.

321 $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_x(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_y(\frac{a}{2},\frac{a}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

322 $f_x = yg(xy) - g(x)$, $f_y = xg(xy)$.

323 $f_x = g(y^x)y^x\ln y - g(x^y)yx^{y-1}$, $f_y = g(y^x)xy^{x-1} - g(x^y)x^y\ln x$.

325 (a) $\{y > x\}$; (b) $\{y < x\}$; (c) $\{y = x\}$; (d) $f_x = -g(x)$, $f_y = g(y)$;
(e) $\{f > 0\} = \{|y| > |x|\}$, $\{f < 0\} = \{|y| < |x|\}$, $\{f = 0\} = \{|y| = |x|\}$.

326 $f_x = ye^{xy}$; $f_y = xe^{xy}$.

329

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2z}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

(observar la dirección $x = y = 0$).

330 $\nabla f = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

331 $\nabla f = \left(e^{xy^3+3}(1+xy^3), 3x^2y^2e^{xy^3+3}\right)$.

332 $\nabla f = e^{-z^2-x-y}\left((1-x-y-z),(1-x-y-z),(1-2z(x+y+z))\right)$.

333 $\nabla f = \left(\frac{yz(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xz(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{xy(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$.

334 -5.

335 $\frac{2}{e\sqrt{5}}$.

336 0.

337 $-\frac{6}{\sqrt{10}}$.

338 $\frac{2(A+C)ab+2B(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

339 $\frac{4e}{\sqrt{3}}$.

340 $\mathbf{n}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

342 $(3,1,-1)$.

344 En la dirección del vector gradiente: $\nabla h(1,0)=(-4e^{-1},0)$

345 Nos lo da el vector $\nabla f(a,b)=(2a^3,2b^3)$.

346 $(\sqrt{2},-1)$.

347 $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$.

348 $(2e,4e)$.

349 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

350 $4x+y=3$.

351 $3x+y=5$.

352 $x+4y=2$.

353 $(\frac{5}{8}+\frac{\pi}{4})(x-2)=(\frac{5}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{1}{2}-y)$.

357 En $(1,0)$: $z=\frac{1}{2}y$; en $(0,1)$: $z=x$; en $(-1,1)$: $z=-\frac{1}{2}y$; en $(0,0)$: $z=0$. Vectores normales: en $(1,0)$: $(0,\frac{1}{2},-1)$; en $(0,1)$: $(1,0,-1)$; en $(-1,1)$: $(0,\frac{1}{2},1)$; en $(0,0)$: $(0,0,1)$.

358 En $(-\pi,0)$: $z=-2\pi x-\pi^2$; en $(0,\pi)$: $z=\pi^3x$.
Vectores normales: en $(-\pi,0)$: $(2\pi,0,1)$; en $(0,\pi)$: $(\pi^3,0,-1)$.

359 $z=1$.
Vector normal: $(0,0,1)$.

360 $z=x-y+2$.
Vector normal: $(1,-1,-1)$.

361 $z=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y$.
Vector normal: $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1)$.

362 $z=2x+2y$.
Vector normal: $(2,2,-1)$.

363 $z=x+ay-1$.
Vector normal: $(1,a,-1)$.

364 $z=2x-4y-3$.
Vector normal: $(2,-4,-1)$.

365 Ambas tiene el mismo plano tangente en $(0,0)$, $z=0$.

366 $(-1,0,-1)$.

367 $(0,4,-1)\times(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)=(0,0,0)$; punto: $(0,-2,5)$.

368 $(\frac{9}{4},1,\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(-\frac{9}{4},-1,-\frac{\sqrt{3}}{4})$.

370 El plano tangente es

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

Por tanto

$$a+b+c=x_0+y_0+z_0+2(\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{x_0z_0}+\sqrt{y_0z_0})=1.$$

371 No tiene plano tangente pues la sección $x=y$ corresponde a la curva $|x|$, que no tiene tangente en $x=0$.

373 $DF=(4x^3,-4y^3)$.

374 $DF=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

375 $DF=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$.

377 Es continua pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=0$ (usar polares desplazadas $x=r\cos\theta$, $y=1+r\operatorname{sen}\theta$).
$f_x(0,1)=1$, $f_y(0,1)=-1$, pero no es diferenciable (según la definición).

378 Es continua en todo $\mathbb{R}^2$, pues $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ (usar polares).
$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$. No es diferenciable en $(0,0)$ (usar la definición). Diferenciable en el resto.

379 (a) $D_{\mathbf{n}}f(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2n_1^2\operatorname{sen}(tn_2)+t^2n_2^2\operatorname{sen}(tn_1)}{t^3(n_1^2+n_2^2)}=n_1^2n_2+n_1n_2^2$;

(b) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$;

(c) No puede ser diferenciable pues si lo fuera $D_{\mathbf{n}}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{n}=0$, $\forall\mathbf{n}$, que contradice lo obtenido en el primer apartado.

380 Si $n_1+n_2\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(0,0)=\frac{n_1^2+n_2^2}{n_1+n_2}$; en caso contrario no existe la derivada direccional. f no puede se diferenciable en $(0,0)$ porque no posee derivadas direccionales en todo vector. Es continua en $(0,0)$ (usar polares).

382 Si $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x=\frac{2y^6-2x^2y^2}{(x^2+y^4)^2},\qquad f_y=\frac{4xy(x^2+y^4)-8xy^5}{(x^2+y^4)^2};$$

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.
f no es continua en $(0,0)$ (usar las direcciones $y=x^\alpha$), por tanto no puede ser diferenciable.

383 Diferenciable si $(x, y) \neq (0,0)$:

$$f_x = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_y = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. No diferenciable en $(0,0)$ (usar la definición);

385 Diferenciable si $y \neq 0$: $f_x = \frac{2x}{y}$, $f_y = -\frac{x^2}{y^2}$. $f_x(x_0, 0) = 0$ pero $\nexists f_y(x_0, 0)$ para $x_0 \neq 0$; $f_y(0,0) = 0$. Luego no es diferenciable si $y = 0$, $x_0 \neq 0$. En $(0,0)$ no es diferenciable según la definición.

386 Diferenciable si $x \neq y$,

$$f_x = \frac{e^{x^2-y^2-1}(2x(x-y)-1)}{(x-y)^2}, \quad f_y = \frac{e^{x^2-y^2-1}(1-2y(x-y))}{(x-y)^2};$$

en el resto no es diferenciable porque no es continua.

2 2 Regla de la cadena y derivadas de orden superior

387

$$(f \circ c)'(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t),$$
$$D(c \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ -y \operatorname{sen}(xy) & -x \operatorname{sen}(xy) \end{pmatrix}$$

388

$$(f \circ c)'(t) = 15t^4 e^{3t^5}, \quad D(c \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6ye^{2xy} & 6xe^{2xy} \\ 3ye^{3xy} & 3xe^{3xy} \end{pmatrix}$$

389

$$(f \circ c)'(t) = (1 + 4t^2)e^{2t^2},$$
$$D(c \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} (1 + 2x^2)e^{x^2+y^2} & 2xye^{x^2+y^2} \\ -(1 + 2x^2)e^{x^2+y^2} & -2xye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

390 No en general. Sólo es cierta si $g' \equiv 0$, es decir, si g =cte.

392 $f_{xx} = g''(x - ct) + h''(x + ct)$; $f_{tt} = c^2(g''(x - ct) + h''(x + ct))$.

393 $u_x = 2xy^2 g(x^2y^2) - yg(xy)$, $u_y = 2x^2 yg(x^2y^2) - xg(xy)$.

395 $g_\rho = f_x \cos\theta \operatorname{sen}\phi + f_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + f_z \cos\phi$,
$g_\theta = -f_x \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi + f_y \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi$,
$g_\phi = f_x \rho \cos\theta \cos\phi + f_y \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi - f_z \theta \operatorname{sen}\phi$. En el caso particular, $g_\rho = 2\rho$, $g_\theta = 0$, $g_\phi = 0$.

396 $h_x(x, y) = f_{,1}(x, u(x, y)) + f_{,2}(x, u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$.

397 $h'(t) = f_{,1}(t, u(t), v(t)) + f_{,2}(t, u(t), v(t))u'(t) + f_{,3}(t, u(t), v(t))v'(t)$.

398

$$h_x(x,y) = f_{,1}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + f_{,2}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + f_{,3}(u(x,y,z),v(x,y),w(x))w'(x).$$

399

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = g_{1,1}(h(x,xy,x^2),xy)(h_{,1}(x,xy,x^2) + h_{,2}(x,xy,x^2)y + h_{,3}(x,xy,x^2)2x) + g_{1,2}(h(x,xy,x^2),xy)y.$$

400

$$g_x = (f_{,11}(f(x,y),y) + f_{,22}(x,f(x,y)))f_{,1}(x,y) + f_{,21}(x,f(x,y));$$
$$g_y = (f_{,11}(f(x,y),y) + f_{,22}(x,f(x,y)))f_{,2}(x,y) + f_{,12}(f(x,y),y).$$

401 $\nabla g(x,y) = F'(f(x,y))\nabla f(x,y)$.

402 Si $h(x) = f(y(x),z(x))$ con $f(y,z) = y^z$ entonces

$$h'(x) = f_{,1}(y(x),z(x))y'(x) + f_{,2}(y(x),z(x))z'(x)$$

con $f_{,1}(y,z) = zy^{z-1}$ y $f_{,2}(y,z) = y^z \log z$.

Si $h_1(x) = f(x,x) = x^x$, $h_1'(x) = x^x(1+\log x)$.

Si $h_2(x) = f(\sqrt{x},\sqrt{x}) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, $h_2'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}^{\sqrt{x}-1}(1+\log\sqrt{x})$.

Si $h_3(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, $h_3'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x-1}\cos^2 x + (\operatorname{sen} x)^{\cos x+1}\log(\operatorname{sen} x)$.

403 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$;

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

406 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x-y)}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yf'(x-y)+f(x-y)}{y^2}$.

407 $u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y = -u_{yy}$.

408 $\phi_{xx} = f''(x-t) + g''(x+t) = \phi_{tt}$.

409 $f_{xyz} = e^{xy} + xye^{xy} + 6xz^2 = f_{zyx}$;

410 $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

411 $f_{xy} = 2x+2y$, $f_{yz} = 2z$, $f_{zx} = 0$, $f_{zyz} = 0$.

412 $f_{xx} = 12x^2y^3 + y^4e^{-xy^2}$;
$f_{xy} = f_{yx} = 12x^3y^2 + e^{-xy^2}(2xy^3 - 2y)$;
$f_{yy} = 6x^4y + e^{-xy^2}(4x^2y^2 - 2x)$;

413 $f_{xx} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x+e^{-y}} + \frac{-2\operatorname{sen}^3 x+6\operatorname{sen} x\cos^2 x}{(\cos^2 x+e^{-y})^2} + \frac{8\operatorname{sen}^3 x\cos^2 x}{(\cos^2 x+e^{-y})^3}$

$f_{xy} = f_{yx} = \frac{e^{-y}\cos x}{(\cos^2 x+e^{-y})^2} + \frac{4e^{-y}\operatorname{sen}^2 x\cos x}{(\cos^2 x+e^{-y})^3}$

$f_{yy} = \frac{-e^{-y}\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x+e^{-y})^2} + \frac{2e^{-y}\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x+e^{-y})^3}$

414 $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial x} = \frac{\partial z^3}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial x\partial y} = 36x^2y^2$.

415 $u_{xx} = 6x = -u_{yy}$.

416 $u_{xx} = 0 = u_{yy}$.

417 $u_{xx} = 2 = -u_{yy}$.

418 $u_{xx} = -6y = -u_{yy}$.

419 $u_{xx} = -\operatorname{sen} x\cosh y = -u_{yy}$.

420 $u_{xx} = e^x\operatorname{sen} y = -u_{yy}$.

422 $u_t = -(m^2+n^2)ke^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$;
$u_{xx} = -m^2e^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$;
$u_{yy} = -n^2e^{-(m^2+n^2)kt}\operatorname{sen}(mx)\cos(ny)$.

423 $u_x = \cos\theta U_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}U_\theta$, $u_y = \operatorname{sen}\theta U_r + \frac{\cos\theta}{r}U_\theta$. La ecuación en polares es $rU_r = 0$.

425 (a) $f_x = \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

(b) $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$;

(e) $f_y(x,0) = 1$.

426 (a) $f_x = -\frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x})$, $f_y = \frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})$.

(b) $z_x = f_{,1}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + f_{,2}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$,
$z_y = f_{,1}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + f_{,2}(g(x,y),h(x,y))\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$;

427 1.

428 1.

429 3.

430 0.

2 3 Derivación implícita. Polinomio de Taylor

431 $\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$.

432 -1.

433 5.

434 0.

435 $7y + 6z = 13$.

436 $x + y + z = 0$.

437 $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0$.

438 $y''(1) = -\dfrac{\frac{\log\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8}}{\frac{\log\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8}}$.

439 (a) $P_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(y - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2)$.

(b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - (x - \frac{\pi}{4}))$.

440 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{a^2}y^2$.

441 $1 + xy - \frac{1}{2}y^2$.

443 $ze + \frac{1}{2}exz - \frac{1}{2}eyz$.

442 $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

444 $P_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$; Luego $f(0.97, 0.05) = \frac{\pi}{4} - 0.04 \approx 0.745398$.

447 $F(x,y,z) = z^3y + zx^2 - 1$ verifica $F(1,0,1) = 0$, es diferenciable con continuidad en ese punto y $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 1$, luego el Teorema de la función implícita asegura la existencia de z como función implícita de x e y.
Las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -2$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -1$, luego el plano tangente es $2x + y + z = 3$.

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 3

3 1 Puntos críticos y extremos

448 $(0,0)$ pto. de silla.

449 $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ mínimo.

451 No hay extremos.

452 $\{(x,x)\}-\{(0,0)\}$ mínimos.

453 $(0,0)$ pto. de silla; $(12,72)$ mínimo.

454 $(0,0)$ pto. de silla; $(1,1)$ máximo.

456 $(0,0,0)$ mínimo.

457 $(0,0)$ pto. de silla. $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$ mínimos.

458 $(0,0)$ (degenerado); $(\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\sqrt[3]{\frac{2}{3}})$ pto. de silla.

460 $(0,0)$, $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ (degenerados) ptos. de silla (observar la sección $y=0$; $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$););

461 $(0,0)$, (degenerado) pto. de silla (observar las sección $y=0$, $y=\frac{3}{2}x^2$);

462 $(0,0)$ pto. de silla; $\{xy=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ (degenerados): máximos si k es impar, mínimos si k es par; (observar que $\log(1)\leq\log(2+\operatorname{sen}(xy))\leq\log(3)$);

463 $\{(x,x)\}$ (degenerados) mínimos ($f(x,x)=0\leq(x-y)^2=f(x,y)$);

464 $(0,0)$ (degenerado) pto. de silla (observar la sección $x=0$); $(-\frac{72}{43}+\frac{6\sqrt{15}}{43},-\frac{15}{43}+\frac{12\sqrt{15}}{43})$ pto. de silla, $(-\frac{72}{43}-\frac{6\sqrt{15}}{43},-\frac{15}{43}-\frac{12\sqrt{15}}{43})$ máximo;

465 $(0,0)$ máximo; $(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{2})$, $(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{2})$ ptos. de silla; $(0,1)$ (degenerado) mínimo (estudiar la función $g(t)=f((x_0,y_0)+t(n_1,n_2))$);

466 $(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ máximos; $(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi)$ mínimos; $(\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)$ (degenerado) ptos. de silla (estudiar la función $g(t)=f((x_0,y_0)+t(n_1,n_2))$);

467 $x=0$ (degenerados) ptos. de silla; $y=0$ (degenerados) ptos. de silla; $(12,8)$ mínimo;

469 No tiene puntos críticos;

471 Función a minimizar $f(x,y)=2(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+2y^2+(y+1)^2+(y-2)^2$. Mínimo en $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

472 $k>\frac{25}{16}$.

473 Función $x^3y^5z^6-x-y-z$; mínimo para $y=\frac{5}{3}x$, $z=2x$.

474 Sistema de puntos críticos:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i-na-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\qquad\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.$$

Para resolver usar la regla de Cramer.

3 2 Extremos condicionados

475 La superficie es un compacto. Máximo: $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$.
Mínimo: $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$;
478 Máximo: $(e, \frac{1}{e})$ (estudiar $f(x, \frac{1}{x})$);
479 Pto. de silla: $(0, 0, 0)$ (estudiar $f(0, y, y)$ y $f(0, y, -y)$);
481 $S(r, h) = 2\pi rh + \pi r^2$, $V = \pi r^2 h$. Mínimo en $r = h = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.
482 $V = xyz$ sujeto a $x + y + z = 1$. Máximo en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
483 Función $x^2 + (y-1)^2$ sujeto a $x^2 = 4y$. Mínimo en $(0, 0)$.
484 Función $\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$, sujeto a $y = x^2$ (se puede minimizar la función al cuadrado). El mínimo se alcanza en el punto de la parábola $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, la distancia es $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.
486 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Mínimo en $(2 - \sqrt[3]{4}, 0, \sqrt[3]{2} - 1)$.
487 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Ptos. más cercanos al origen $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$.
488 Función $x^2 + y^2 + z^2$. Puntos críticos:

$$\begin{gathered}
(0,0,1),(0,0,-1),(0,1,0),(0,-1,0),(1,0,0),(-1,0,0),\\
(0,\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(0,-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(0,\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(0,-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),\\
(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0,\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0,-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0,-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0,\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}),\\
(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0),(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0),\\
(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},0),(\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),(\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),\\
(\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),(\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),\\
(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}),(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}},\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}).
\end{gathered}$$

Los últimos ocho puntos son los más lejanos al origen.
489 Puntos críticos: $\{(0, 0, 3), \{x^2 + y^2 = \frac{5}{2}, z = \frac{1}{2}\}\}$.
Como $f|_{\{x^2+y^2+z=3\}} = 3 - z + z^2 \geq \frac{11}{4} = f|_{\{x^2+y^2+z=3\}}$, los puntos de $\{x^2 + y^2 = \frac{5}{2},\ z = \frac{1}{2}\}$ son mínimos.
491 Ptos. críticos: $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$,
$(-\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, \sqrt[4]{\frac{1}{5}}, 0)$ (máximo), $(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, -\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, 0)$ (mínimo).
493 $V(x, y, z) = 8xyz$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Máximo en $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

Dimensiones: alto = ancho = largo = $2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

495 $a=\sqrt{2}$, $b=4\sqrt{2}$.

497 Máximo de $f(x)$ es $a+b$, sujeto a $(a-2)^2+(b-2)^2=1$.
Ptos. críticos $(2+\sqrt{\frac{1}{2}}, 2+\sqrt{\frac{1}{2}})$, $(2-\sqrt{\frac{1}{2}}, 2-\sqrt{\frac{1}{2}})$; el primero es un máximo y el segundo el mínimo buscado (obsérvese que la restricción define un compacto).

499 $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ (es un máximo pues el hessiano reducido es definido negativo).

500 Función $2x^2+y^2-xy$ sujeto a $x+y=96$; mínimo para $x=36$, $y=60$.

502 $(1,1,0)$ (es un mínimo pues el hessiano reducido es definido positivo).

503 Mínimos: $(\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{66}}{5}, \frac{2}{5}+\frac{\sqrt{66}}{10}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{66}}{5}, \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{66}}{10}, \frac{1}{2})$.

504 Ptos. críticos en el interior: $(0,0)$, $(a^{4/5}, -a^{3/5})$.
En la frontera: $(1,-a^{1/3})$, $(-1,a^{1/3})$, $(a^{1/2},-1)$, $(-a^{1/2},-1)$.
Los vértices del cuadrado: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.
Máximo en $(1,1)$; mínimo en $(-1,a^{1/3})$.

506 Ptos. críticos en el interior: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$. El único que satisface las restricciones es $(-1,0)$;
En la frontera $x^2+y^2=4$: $(0,2)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(2,0)$,
$\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$,
$\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, -\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{8}}\right)$.
Los únicos que satisfacen la otra restricción son $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$, $(-2,0)$.
En la frontera $y=x+1$: $(-1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}+1)$.
Con las dos condiciones $(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2})$.
Máximo: $(2,0)$; Mínimo: $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{8}}\right)$.

507 Ptos. críticos en el interior: $(0,0)$.
En el lado $(0,0)$-$(1,0)$: todo el segmento es de puntos críticos.
En el lado $(0,0)$-$(0,1)$: todo el segmento es de puntos críticos.
En el lado $(0,1)$-$(1,0)$: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
Máximo en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

508 (a) Ptos. críticos: $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ (nótese que $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ no verifica la condición $z\le 1$).
(b) Ptos. críticos: $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$.
Puesto que M es un compacto, el máximo se alcanza en $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ y el mínimo en $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 4

4 1 Integrales dobles

511 9.

512 $\frac{8}{3}$.

513 $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$.

514 $\frac{1}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3}) - \frac{2}{3}$.

518 $\frac{1}{40}$.

519 $\frac{7}{60}$.

521 $\frac{1}{6}$.

522 $2\pi + \pi^2$.

524 $\frac{e-2}{2}$.

525 $-\frac{1}{18}$.

527

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (1+xy)\,dy\,dx + \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+xy)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (1+xy)\,dy\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Véase la Figura 6.29(a)).

528 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2x}{\pi}}^{\operatorname{sen} x} y\,dy\,dx = \frac{\pi}{24}$. (Véase la Figura 6.29(b)).

531 $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx\,dy = \frac{5}{6}$.

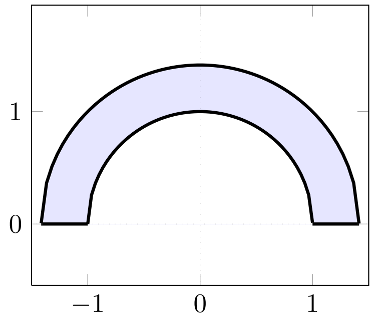
532 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y\,dy\,dx = \frac{\pi}{2}$.

533 $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y)\,dy\,dx = \frac{11}{6}$.

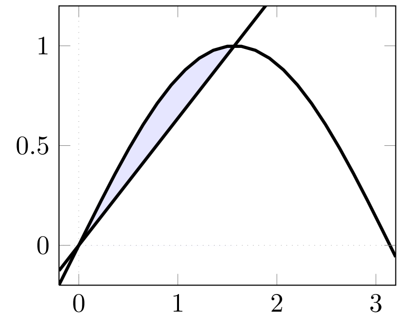
535 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \frac{xy}{2}\,dy\,dx = 1$.

538 $-\frac{16}{15}$; región entre las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2 - 2x^2$.

540 $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{2}|x|}^{\sqrt{x^2+1}} xy^2\,dy\,dx = 0$.



(a) 527



(b) 528

Figura 29: Regiones de integración en el plano

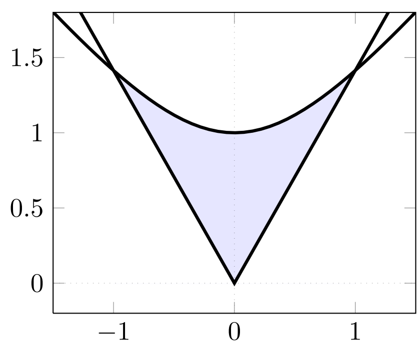


Figura 30: Gráfica del Ejercicio 540

542 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dy\,dx.$

543 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos r}\cos\theta\,d\theta\,dr.$

544 $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}}\frac{x+y}{\operatorname{sen} x}\,dx\,dy.$

546 $\displaystyle\int_0^1\int_{1-x}^1(x+y^2)\,dy\,dx.$

547 $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy+\int_1^9\int_{\frac12(y-3)}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy=\frac{32}{3}.$

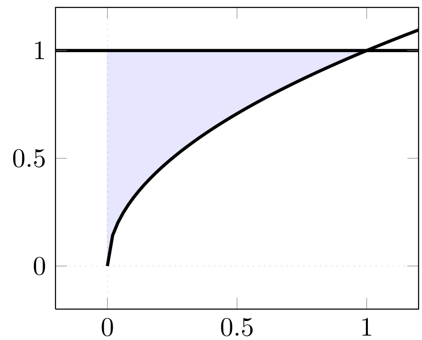


Figura 31: Región del Ejercicio 553

548 $\displaystyle\int_{-4}^{0}\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} y\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} y\,dy\,dx = 0.$

551 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\sqrt{x^4+1}\,dy\,dx = 0.$

553 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \frac{1}{3}(e-1).$

4 2 Integrales triples

555 $\frac{1}{3}$.
556 $\frac{15}{8}$.
557 18.
559 $\frac{1}{12}$; Tetraedro con base en el triángulo $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ limitado por el plano $z=y$.
561 $\frac{11}{9}$; Región limitada por el plano $z=0$ y el paraboloide hiperbólico $z=xy$ que queda encima del triángulo $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,2,0)$.
562 $\frac{7}{6}$; Región limitada por el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$ que queda encima del triángulo $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,2,0)$.
563 $\frac{52}{63}-\frac{12\sqrt{3}}{35}$;
Tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,1,2)$.

565 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x-y}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx = \frac{5}{24}.$

566 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1-x^2} xyz\,dz\,dy\,dz = 0.$

570 $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^{1-x}(1-z^2)\,dz\,dy\,dx+\int_0^1\int_x^1\int_0^{1-y}(1-z^2)\,dz\,dy\,dx=\frac{3}{10}.$

571

$$\int_0^1\int_y^1\int_0^y f\,dz\,dx\,dy,\qquad \int_0^1\int_0^y\int_y^1 f\,dx\,dz\,dy,$$
$$\int_0^1\int_z^1\int_y^1 f\,dx\,dy\,dz,\ \int_0^1\int_z^1\int_z^x f\,dy\,dx\,dz,$$
$$\int_0^1\int_0^x\int_z^x f\,dy\,dz\,dx.$$

572

$$\int_0^1\int_y^1\int_0^{2-x-y} f\,dz\,dx\,dy,$$
$$\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^x f\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_{2-2x}^{2-x}\int_0^{2-x-z} f\,dy\,dz\,dx,$$
$$\int_0^2\int_0^{1-\frac{z}{2}}\int_0^x f\,dy\,dx\,dz+\int_0^1\int_{1-\frac{z}{2}}^1\int_0^{2-x-z} f\,dy\,dx\,dz+$$
$$+\int_1^2\int_{1-\frac{z}{2}}^{2-z}\int_0^{2-x-z} f\,dy\,dx\,dz,$$
$$\int_0^1\int_0^{1-y}\int_y^1 f\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_{1-y}^{2-2y}\int_y^{2-y-z} f\,dy\,dz\,dx,$$
$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_y^1 f\,dx\,dy\,dz+\int_0^1\int_{1-z}^{1-\frac{z}{2}}\int_y^{2-y-z} f\,dx\,dy\,dz+$$
$$+\int_1^2\int_0^{1-\frac{z}{2}}\int_y^{2-y-z} f\,dx\,dy\,dz.$$

573

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{y+z-1}^0 f\,dx\,dz\,dy,\qquad \int_0^1\int_{z-1}^0\int_0^{1+x-z} f\,dy\,dx\,dz,$$
$$\int_{-1}^0\int_0^{1+x}\int_0^{1+x-z} f\,dy\,dz\,dx,$$
$$\int_0^1\int_{y-1}^0\int_0^{1+x-y} f\,dz\,dx\,dy,\qquad \int_{-1}^0\int_0^{1+x}\int_0^{1+x-y} f\,dz\,dy\,dx.$$

575

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\pi} x^2\cos z\,dz\,dy\,dx=0.$$

Véase la Figura 32.

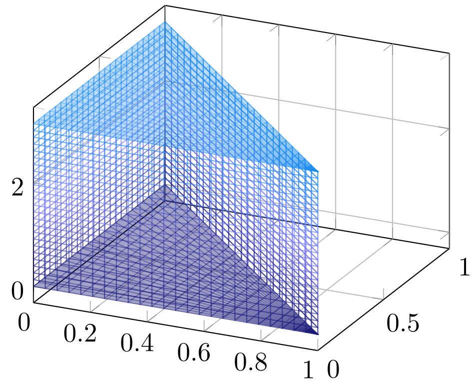


Figura 32: Representación gráfica del Ejercicio 575

576 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx = \frac{1}{3}.$

577 $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{x+y+1} dz\, dy\, dx = \frac{88}{3}.$

579 $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\, dy\, dx = \frac{16}{3}a^3.$

(Figura 33).

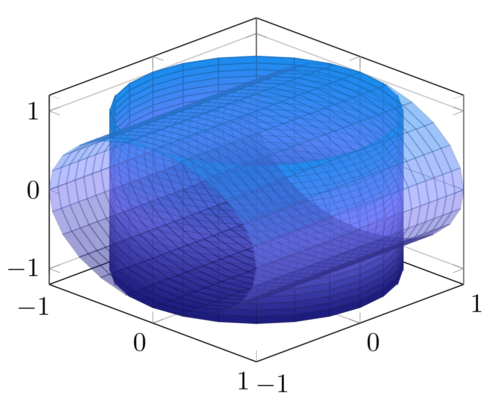


Figura 33: Gráfica del Ejercicio 579

580 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\operatorname{sen}(x+y)}^{\cos^2(x+y)} dz\, dy\, dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{2}.$

581 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-z} dy\,dz\,dx = \frac{256}{15}.$

582 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_{0}^{10-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \frac{332}{105}.$

584 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$

586 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx.$

588 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \frac{101\sqrt{3}}{105}+\frac{8\pi}{3}.$

4 3 Cambios de variable

589 $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{\alpha^2}{2}\,d\theta = \pi\alpha^2.$

590 $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{(1+\cos(2\theta))^2}{2}\,d\theta = \frac{3\pi}{2}.$

592 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta = 4+\frac{\pi}{4}.$

594 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{2}} r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}.$

596 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{\frac{2}{\cos\theta}} \mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = 2\ln 2.$

598 (a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{\frac{1}{2}+y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} f(x,y)\,dy\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2\cos(2\theta)}}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,dr\,d\theta.$

600 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2} r f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta.$

601 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta.$

604 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{10-r^2}-2\right)r\,dr\,d\theta=\frac{20\pi\sqrt{10}}{3}-\frac{52\pi}{3}.$

606 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^4\,dr\,d\theta=\frac{64\pi}{5}.$

607 (Polares) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{4}\log 2.$

608 (Polares) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}.$

611 $x=\frac{3}{5}u+\frac{1}{5}v$, $y=\frac{2}{5}u-\frac{1}{5}v$; $\displaystyle\int_1^2\int_2^5\frac{1}{5}\,dv\,du=\frac{3}{5}.$

612 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$. $\displaystyle\int_1^2\int_1^2\frac{1}{2v}\,du\,dv=\frac{1}{2}\ln 2.$

613 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}}$, $y=\sqrt{\frac{v}{u}}$; $\displaystyle\int_3^6\int_2^4\frac{1}{2v}\,du\,dv=\ln 2.$

614 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{u^2v}}$, $y=\frac{1}{\sqrt[3]{uv^2}}$; $\displaystyle\int_1^2\int_1^4\frac{1}{3u^2v^2}\,dv\,du=\frac{1}{8}.$

615 $u=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$, luego $x=\dfrac{2u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{2v}{u^2+v^2}$;

$$\int_1^3\int_1^4\frac{1}{4}\,dv\,du=\frac{3}{2}.$$

616 Hacemos el cambio $u=x-y$, $v=x+y$, luego

$$\int_0^1\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

617 (Esféricas)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\frac{\rho^2\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{1+\rho^2}}\,d\rho\,d\phi\,d\theta=2\pi\left(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right).$$

619 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{1+r}^{\sqrt{25-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\frac{41\pi}{3}.$

620 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{2}r}^{\sqrt{1+r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$

623 Cardioide de revolución alrededor del eje Z,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{8\pi}{3},$$

(véase la Figura 6.22(c) en la pág. 240).

624 (Polares) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\operatorname{sen}(r^2)\,dr\,d\theta = \pi(1-\cos(1)).$

627 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_2^3 ze^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{5\pi}{2}(e^4-1).$

629 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} r(zr\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\,dz\,dr\,d\theta = 0.$

630

$$\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} \rho^3(\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi + \cos\phi\operatorname{sen}\phi)\,d\phi\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

633 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha}\int_{\sqrt{\alpha^2-r^2}}^{\alpha} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{12}\alpha^3.$

635 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}}\int_r^{1-2r} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{27}.$

636 (Cilíndricas cambiadas $x = x$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$)

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{10-2r^2}}^{\sqrt{10-2r^2}} r\,dx\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(10\sqrt{10}-16\sqrt{2}).$

637 (Cilíndricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{16}{3}-2\sqrt{3}\right).$

639 (Cilíndricas cambiadas $x = x$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\theta$)

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dx\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right).$

641 (Esféricas) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} \cos\phi\operatorname{sen}^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$

643 (Cilíndricas dilatadas: $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} 6r\,dz\,dr\,d\theta = 3\pi.$$

644 (Cilíndricas desplazadas y dilatadas $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{1}{4}r^2}^{\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

645 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dy\,dx.$

646 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{\sqrt{3}x} (x^2+y^2)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx.$

648 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x^2+y^2} xz\,dz\,dy\,dx.$

650

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^1 (x+y)\,dz\,dx\,dy + \int_{-2}^0\int_{-\sqrt{-2y-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}}\int_0^1 (x+y)\,dz\,dx\,dy.$$

651 $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$

653

$$\int_0^2\int_x^{\sqrt{3}x}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dy\,dx + \int_2^{\sqrt{8}}\int_x^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dy\,dx.$$

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 5

5 1 Curvas en el plano y el espacio

654 Segmento del eje $x = 0$ entre $(0, -1)$ y $(0, 1)$ que vuelve hasta $(0, \frac{1}{2})$.

655 Recta $x - 2y = 1$ recorrida desde $x = -\infty$ a $x = +\infty$.

656 Grafo de $y = -\sqrt{x}$ partiendo de $(0, 0)$.

659 Rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ recorrida de abajo hacia arriba (Figura 34)

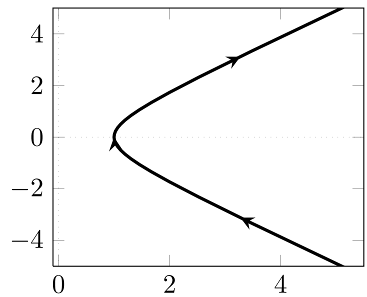


Figura 34: Gráfica del Ejercicio 659

660 $\sigma(t) = (-3 + 7t, 2 - 2t)$, $t \in [0, 1]$.

661 $\sigma(t) = (6\cos t, 6\,\mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

663 $\sigma(t) = (t, \tan t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

665 $\sigma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sec t, \frac{1}{\sqrt{3}}\tan t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

668 $\mathbf{T} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{N} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{B} = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6})$

670 $\mathbf{T} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{N} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$.

671 $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{9}$.

672 $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

673 $y + \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi^2}{4}$.

674 $x + y = 3$.

675 $\kappa(t) = -1$.

676 $\kappa(t) = -2\frac{\sqrt{t}}{1+4t}$

678 $\kappa(t) = \frac{\sqrt{5}}{(1+4\,\mathrm{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}}}$

5 2 Longitud de arco

679 2π.

681 $|a|\pi^2$.

682 $\displaystyle\int_0^{2\pi} 3|\operatorname{sen} t \cos t|\, dt = 6.$

683 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{8}} 6t\sqrt{t^2+1}\, dt = 52.$

684 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\, dt = \frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$

686 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$

687 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \frac{1}{2}(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}).$

689 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = 1.$

5 3 Superficies

690 $\mathbf{n}(u,v) = (2-\cos v)(\cos u\cos v, \operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} v)$. Es suave. Se trata de un toro generado por la circunferencia de radio 1 en el plano XZ con centro en el punto $(2,0,0)$ que gira alrededor del eje Z (Figura 35).

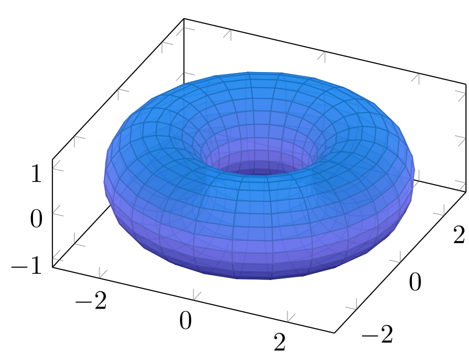


Figura 35: Toro del Ejercicio 690

691 $z = x + y$.

693 $z = 6x + 8y - 3$.

695 Véase la Figura 36. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{5}|\cos\theta|\,dr\,d\theta = 4\sqrt{5}$.

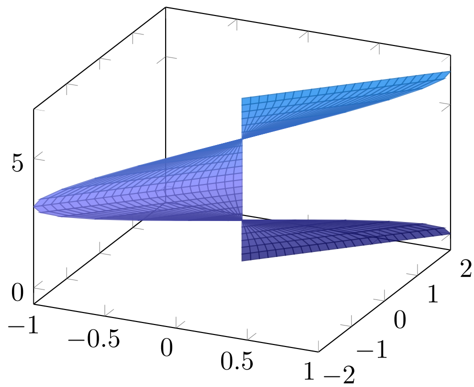


Figura 36: Gráfica del Ejercicio 695

696 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = 4\pi$.

699 $\Phi(u,v) = (u, v, -\sqrt{1+u^2+v^2})$, $u \in [-1,1]$, $v \in [-3,3]$ (véase la Figura 37).

700 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta + 3)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

703 $\Phi(u,v) = (u, 4u + v^2, v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$.

704 $\Phi(\theta,\phi) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

706 $\Phi(r,\theta) = (4(1-r^2), 2r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}r\cos\theta)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

709 Véase la Figura 38. $\Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $r \in [0,\cos\theta]$;
$\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{1-r^2})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $r \in [0,\cos\theta]$;

$$\text{Área} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi.$$

711 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 4 - r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,2]$;
$\mathbf{n}(r,\theta) = (r, 2r, r)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{6}r\,dr\,d\theta = 4\sqrt{6}\pi.$$

712 $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r^2\cos(2\theta))$, $r \in [1,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}(r,\theta) = (2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$;

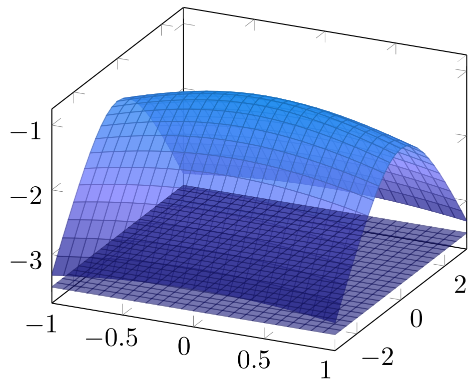


Figura 37: Gráfica del Ejercicio 699

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

714 $\Phi(\theta,z)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[0,\pi]$, $z\in[\operatorname{sen}\theta,2\operatorname{sen}\theta]$;
$\mathbf{n}(\theta,z)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)$;

$$\int_0^{\pi}\int_{\operatorname{sen}\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} dz\,d\theta = 2.$$

715 $\Phi(\theta,z)=(2\cos^2\theta,2\cos\theta\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $z\in[0,2\cos\theta]$;
$\mathbf{n}(\theta,z)=(2\cos(2\theta),2\operatorname{sen}(2\theta),0)$;

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 2\,dz\,d\theta = 4\pi.$$

717 $\Phi(\theta,\phi)=(\sqrt{3}\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\phi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,\pi]$;
$\mathbf{n}(\theta,\phi)=(-\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi,-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi,-3\operatorname{sen}\phi\cos\phi)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\phi\sqrt{1+\cos^2\phi}\,d\phi\,d\theta = 6\pi+3\sqrt{2}\pi\log(\sqrt{2}+1).$$

718 $\Phi(\theta,z)=(\sqrt{2z-z^2}\cos\theta,\sqrt{2z-z^2}\operatorname{sen}\theta,z)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[1,2]$;
$\mathbf{n}(\theta,z)=(\sqrt{2z-z^2}\cos\theta,\sqrt{2z-z^2}\operatorname{sen}\theta,z-1)$;

$$\int_0^{2\pi}\int_1^2 dz\,d\theta = 2\pi.$$

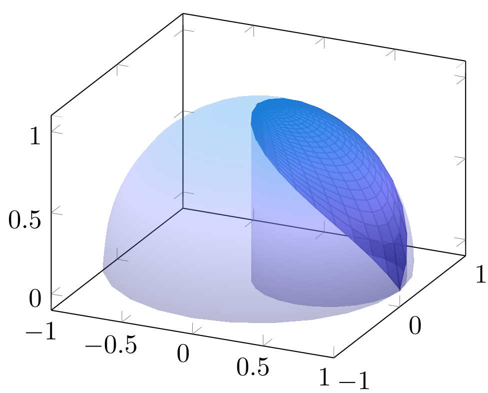


Figura 38: Gráfica del Ejercicio 709

SOLUCIONES DEL CAPÍTULO 6

6 1 Campos vectoriales. Potenciales escalares

720 $\nabla \times F = (-2yz, -2xz, -x^2)$; $\quad \operatorname{div} F = 2xy + z^2 + x^2$.

721 $\nabla \times F = (-x^2 z, 2xyz + y^2, -2yz)$; $\quad \operatorname{div} F = -x^2 y$.

723 $\nabla \times F = \left(\frac{x}{z}, -\frac{y}{z} + xye^{xyz}, \cos(x-y) - xze^{xyz}\right)$;
$\operatorname{div} F = yze^{xyz} - \cos(x-y) - \frac{xy}{z^2}$.

724 Calcúlese $\nabla \times F$.

725–729 Véase el Ejercicio 728.

730–732 Véase el Ejercicio 733

734 No es gradiente.

735 Es gradiente. Potencial escalar $f(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

736 Es gradiente. Potencial escalar $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 5xy - y^2$.

737 No es gradiente.

739 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy^2 + \frac{y^4}{4}$.

740 Es gradiente allí donde está definido. Potencial escalar: $f(x,y) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\sqrt{y}$.

742 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x,y,z) = x^2 yz - \cos x$.

744 Es gradiente. Potencial escalar: $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xz) + \cos(xy) + 1$.

746 $\dfrac{\partial P(x)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(y)}{\partial x} = 0$.

747 $\dfrac{\partial f(x+y)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x+y)}{\partial y} = f'(x+y)$.

6 2 Integrales de línea

749 $\displaystyle\int_0^1 (9+8t)\sqrt{9t+4t^2}\,dt = \frac{26}{3}\sqrt{13}$.

750 $\displaystyle\int_{-1}^0 t^3\sqrt{1+9t^4}\,dt = \frac{1}{54}(1-10\sqrt{10})$.

751 $\displaystyle\int_0^{\frac{20}{3}} (1+\frac{9}{4}t)^{\frac{3}{4}}\,dt = \frac{2032}{63}$.

752 $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

755 $\sigma_1(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$;
$\sigma_2(t) = (t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$;
$\sigma_3(t) = (-t, 0)$, $t \in [0, 1]$;

$$\int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \sqrt{2}\,dt + \int_{-1}^0 (-t)\,dt = \sqrt{2} + 1.$$

757 σ es el trozo de recta $y = x$ entre $(1, 1)$ y $(0, 0)$ con recorrido de ida y vuelta; $\displaystyle\int_\sigma f\,d\sigma = 0$, $\operatorname{long}(\sigma) = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{32}|t^3| = 2\sqrt{2}$.

758 Grafo de $y = \operatorname{sen} x$ con $x \in [0, \pi]$; $\displaystyle\int_\sigma f = \frac{3\pi}{2}$.

760 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}^2 t \cos t\right)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4}$.

761 $\displaystyle\int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}$.

762 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{sen}(2t))\,dt = -1$.

764 $\sigma_1(t) = (1 - t, t, 0)$, $t \in [0, 1]$; $\sigma_2(t) = (0, 1 - t, t)$, $t \in [0, 1]$;
$\sigma_3(t) = (t, 0, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$;

$$\int_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3} \mathbf{F} \cdot d\sigma = 0.$$

766 $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

768 $\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \frac{11}{15}$.

770 $2e^3$.

771 2.

774 Véase la Figura 39. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = 0$.

775 7.

777 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = -\pi$.

779 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = -\pi$.

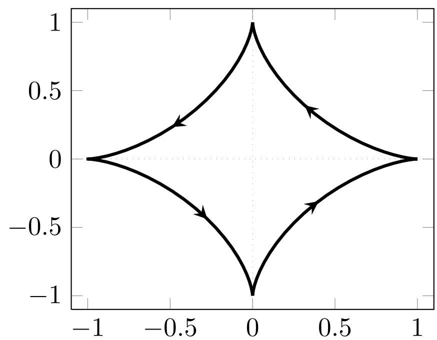


Figura 39: Hipocicloide del Ejercicio 774

780 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = 2\pi.$

781 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = 2\pi.$

784 Trabajo $= \frac{23}{6}$.

785 Trabajo $= \frac{1061}{60}$.

786 Trabajo $= 4b^2 + 4 + 8b\pi$. Mínimo para $b = \pi$.

790 $f(x, y) = e^{xy}$; $f(5, -1) - f(-5, 1) = 0$.

791 $f(x, y) = x^3y^2$; $f(4, 2) - f(1, 0) = 256$.

793 $f(x, y, z) = \frac{1}{2}\log(1 + x^2 + y^2 + z^2)$; $f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = \frac{1}{2}\log(4)$

796 (a) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \cos t \, dt = 0.$

(b) $\nabla \times F = 0$; $f(x, y, z) = x^2y + xz^3$.

798 $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F} = 1.$

6 3 Teorema de Green

799 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (-2)\, dA = -2.$

800 $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

$$\int_{\partial D} xy\, dx + xy\, dy = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t \cos t + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = 0;$$

$$\iint_D (y-x)\,dA = \text{(polares)}= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta = 0.$$

802 Si D es la región encerrada por la curva C,

$$\begin{aligned}\int_C (x^3+y^3)\,dy-(x^3+y)\,dx &= \iint_D (3x^2+1)\,dA = [\text{Polares}]\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r^2\cos^2\theta+1)r\,dr\,d\theta = \frac{7\pi}{4}.\end{aligned}$$

804 $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\sigma = \iint_R (-1)\,dA = -\text{Área}(R) = -\pi.$

805 $\displaystyle\int_1^2\int_1^2 (6xy-x^2)\,dx\,dy = \frac{67}{6}.$

806 Área $= 9$.

808 $\sigma_1(t)=(t,t^3)$, $t\in[0,1]$; $\sigma_2^-(t)=(t,\sqrt{t})$, $t\in[0,1]$;

$$\text{Área(R)} = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 2t^3\,dt - \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt\right) = \frac{5}{12}.$$

810 Si $\mathbf{F}=f\nabla g$ entonces $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g$.

811 Escribir la primera identidad de Green para f y g y para g y f y luego restar.

812 Véase la solución del Ejercicio 807.

813 Aplicar el Teorema de Green para $P=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

814 (a) $\partial R = C_1\cup C_2$ con:
$C_1 \equiv \alpha_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$; $C_2\equiv\alpha_2(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$;
Nótese que C_1 tiene orientación contraria.

$$\int_{C_1} P\,dy - Q\,dx = -2\pi;\ \int_{C_2} P\,dy-Q\,dx = 2\pi;\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D^+} P\,dy - Q\,dx = 2\pi.$

(c) P y Q no están definidos en el origen.

818 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} = \iint_D 3(x^2+y^2)\,dA = \frac{3}{2}\pi.$

6 4 Integrales de superficie

819 $\Phi_1(u,v)=(u,v,0)$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,u]$;
$\Phi_2(u,v)=(u,0,v)$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,1-u]$;
$\Phi_3(u,v)=(u,u,v)$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,1-u]$;
$\Phi_4(u,v)=(u,v,1-u)$, $u\in[0,1]$, $v\in[0,u]$;

$$\int_0^1\int_0^u uv\,dv\,du+\int_0^1\int_0^{1-u} u^2\sqrt{2}\,dv\,du+\int_0^1\int_0^u uv\sqrt{2}\,dv\,du=\frac{5\sqrt{2}+1}{8}.$$

821 $\Phi_1(u,v)=(u,v,-1)$, $u,v\in[0,1]$; $\Phi_2(u,v)=(u,v,1)$, $u,v\in[0,1]$;
$\Phi_3(u,v)=(u,-1,v)$, $u,v\in[0,1]$; $\Phi_4(u,v)=(u,1,v)$, $u,v\in[0,1]$;
$\Phi_5(u,v)=(-1,u,v)$, $u,v\in[0,1]$; $\Phi_6(u,v)=(1,u,v)$, $u,v\in[0,1]$;

$$\int_0^1\int_0^1 du\,dv=1;\ \int_0^1\int_0^1 v^2\,du\,dv=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_S z^2\,dS=\frac{10}{3}.$$

823 $\frac{\sqrt{3}}{24}$.

824 $\frac{1}{6}(33\sqrt{33}-17\sqrt{17})$.

826 $\frac{\pi}{8}(17\sqrt{17}\frac{46}{15}+\frac{2}{15})$.

828 $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=0.$

831 $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=\frac{5}{3}e-\frac{23}{12}.$

832 $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=1.$

835 $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=0.$

837 $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=-\frac{2\pi}{3}.$

839 Usar que $\displaystyle\int_S\mathbf{F}=\int_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$, con $\mathbf{N}$ la normal unitaria a S.

840 $\Phi(\theta,\phi)=(R\cos\theta\operatorname{sen}\phi,R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,R\cos\phi)$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\phi\in[0,\frac{\pi}{2}]$;
$\mathbf{n}(\theta,\phi)=-R^2\operatorname{sen}\phi\Phi(\theta,\phi)$;

$$\text{Área}(S)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{R^2\pi}{2};$$

$$\bar{x}=\frac{1}{\text{Área}(S)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{R}{2};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Área}(S)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{R}{2};$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{Área}(S)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{R}{2}.$$

6 5 Teorema de Gauss

843 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz = 3.$

846 $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 2x\, dz\, dy\, dx = 48.$

848 $D = \{0 \le z \le 9 - (x+1)^2 - (y-2)^2\}$; $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = \iiint_D 3\, dV = \frac{243}{2}\pi.$

849 $\displaystyle\int_S \mathbf{F} = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 2\pi.$

851 Si D es el volumen $\{z \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \le 4-\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ (Figura 40),

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \frac{67}{6}\pi;$$

$\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con $S_1 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\}$, $S_2 = \{x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 4\}$ y $S_3 = \{x^2+y^2+(z-4)^2 = 1,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \le 4\}$;

$$\int_{S_1} \mathbf{F} = 0; \quad \int_{S_2} \mathbf{F} = 16\pi; \quad \int_{S_3} \mathbf{F} = -\frac{29}{6}\pi.$$

Finalmente $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{F} = \frac{67}{6}\pi.$

855 Aplicar el Teorema de Gauss.
Una parametrización del cono es: $\Phi_1(r,\theta) = (ar\cos\theta, ar\operatorname{sen}\theta, hr)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
$\mathbf{n}_1(r,\theta) = (ahr\cos\theta, ahr\operatorname{sen}\theta, -a^2 r)$;

$$\frac{1}{3}\int_{\Phi_1} \mathbf{F} = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (a^2r^2h\cos^2\theta + a^2r^2h\operatorname{sen}^2\theta - a^2r^2h)\, dr\, d\theta = 0;$$

La tapa: $\displaystyle\frac{1}{3}\int_{\Phi_2} \mathbf{F} = \frac{1}{3}\int_{\Phi_2} (x,y,z)\cdot(0,0,1)\, dS = \frac{1}{3}\,\text{Área}(\Phi_2) = \frac{1}{3}\pi a^2 h.$

856 Basta usar que $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.

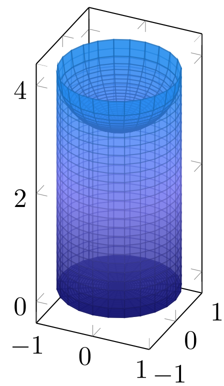


Figura 40: Volumen del Ejercicio 851

857

$$\int_S \mathbf{F} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\, dV$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} 3r(r^2+z^2)\, dz\, dr\, d\theta.$$

859 Si cerramos la superficie S con S_1, S_2 generando un volumen D, (véase la Figura 41)

$$\int_{S\cup S_1\cup S_2} \mathbf{F} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 0;$$

$S_1 \equiv \Phi_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,1]$; $\|\mathbf{n}_1(r,\theta)\| = r$;
$S_2 \equiv \Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 2)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $r \in [0,2]$; $\|\mathbf{n}_2(r,\theta)\| = r$;

$$\int_{S_1} \mathbf{F} = \int_{S_2} \mathbf{F} = \int_S \mathbf{F} = 0.$$

861 Como la superficie es cerrada

$$\int_S (xy^2, x^2y, y) = \iiint_D (y^2+x^2)\, dV = \pi.$$

6 6 Teorema de Stokes

862 $\sigma^+(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 4\cos^2 t)$, $t \in [0,2\pi]$;

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (4 - 32\cos^3 t\operatorname{sen} t)\, dt = 8\pi;$$

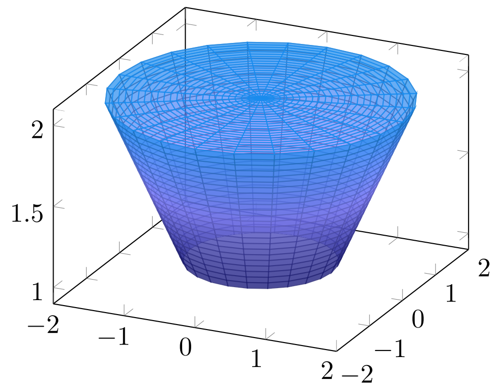


Figura 41: Gráfica del Ejercicio 859

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r^2\cos^2\theta)$, $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$;
$\mathbf{n}_{\mathrm{int}}(r,\theta) = (-2r^2\cos\theta, 0, r)$;

$$\int_S \nabla\times\mathbf{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r\,dr\,d\theta = 8\pi.$$

864 $\sigma(t) = (\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t, 0)$, $t \in [0,1]$;

$$\int_S \mathbf{F} = 0;\ \nabla\times\mathbf{F} = 0.$$

865 $\sigma_1(t) = (1-t, t, 0)$, $t \in [0,1]$; $\sigma_2(t) = (0, 1-t, t)$, $t \in [0,1]$;
$\sigma_3(t) = (t, 0, 1-t)$, $t \in [0,1]$;

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} = 0;\ \nabla\times\mathbf{F} = 0.$$

866

$$\int_C \mathbf{F} = \int_S \nabla\times\mathbf{F} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N} = \int_S (3,-2,-1)\cdot(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 0.$$

868 (Véase la Figura 42) $\Phi(r,\theta) = (\frac{1}{2} + r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \frac{1}{2} + r\cos\theta)$, $r \in [0,\frac{1}{2}]$,
$\theta \in [0,2\pi]$; $\|\mathbf{n}(r,\theta)\| = \sqrt{2}r$;

$$\int_C \mathbf{F} = \int_S \nabla\times\mathbf{F} = \int_S (-2z, xy - z, -xz)\cdot(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \int_S \frac{z}{\sqrt{2}}(2-x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r(\tfrac{3}{4} - r^2\cos^2\theta + r\cos\theta)\,dr\,d\theta = \frac{11}{64}\pi.$$

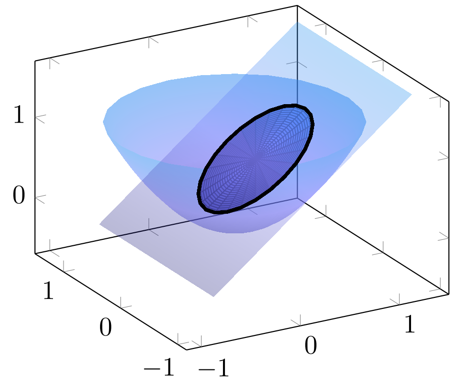


Figura 42: Ejercicio 868: paraboloide cortado por un plano

869 Para $S_1 = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, ∂S_1: $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $\in [0, 2\pi]$;

$$\int_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\partial S_1} \mathbf{F} = 0.$$

Para $S_2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \leq 0\}$, $\partial S_2 \equiv \sigma^{-}(t)$. Luego $\int_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

871 Usar el teorema de Stokes.

$$\int_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\partial S_1} \mathbf{F} = \int_{\partial S_2} \mathbf{F} = \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{F}.$$

Usar que S y $\bar{S}$ tienen la misma frontera, por tanto

$$\int_{\bar{S}} \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\bar{S}} (1, -1, 0) \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})\, dS = 0.$$

872 (a) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\int_C \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

$\mathbf{F}$ no puede ser conservativo pues la integral a lo largo de C, que es una curva cerrada, no es nula.

(b) $\mathbf{F}$ no está definido en el eje Z, y por tanto no puede estar definido en todo punto de una superficie que tenga a C como frontera.

875 $\int_C \mathbf{F} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} = 2\pi$.

6 7 Potenciales vectoriales

876 No.

877 Sí. $\mathbf{G} = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2y}{2} - \frac{yz^2}{2}, 0)$.

882 (a) $S \equiv \Phi(u,v) = (u, v, u+v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [\frac{u^2}{2}, \sqrt{u}]$; $\mathbf{n}(u,v) = (-1,-1,1)$;

$$\int_S \mathbf{F} = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \int_{\frac{u^2}{2}}^{\sqrt{v}} -2u\,dv,\, du = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}.$$

(b) Cerramos S con (véase la Figura 43):
$S_1 \equiv \Phi_1(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [0, u + \frac{u^2}{2}]$; $\mathbf{n}_1(u,v) = (u,-1,0)$;
$S_2 \equiv \Phi_2(u,v) = (u^2, u, v)$, $u \in [0, \sqrt[3]{2}]$, $v \in [0, u+u^2]$; $\mathbf{n}_2(u,v) = (-1, 2u, 0)$;
$S_3 \equiv \Phi(u,v) = (u, v, 0)$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$, $v \in [\frac{u^2}{2}, \sqrt{u}]$; $\mathbf{n}_3(u,v) = (0,0,-1)$;
tal que $\partial D = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Como $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$,

$$\int_{S_1\cup S_2\cup S_3} \mathbf{F} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{4};$$

(c) $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G} = (xz - \frac{y^2}{2}, 0, yz)$;
$\partial S = \alpha_1 \cup \alpha_2$, con:
$\alpha_1^-(u) = (u^2, u, u+u^2)$, $u \in [0, \sqrt[3]{2}]$;
$\alpha_2(u) = (u, \frac{u^2}{2}, u + \frac{u^2}{2})$, $u \in [0, \sqrt[3]{4}]$;

$$\int_{\alpha_1^-} \mathbf{G} = 2 + \frac{8}{5}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2};$$

$$\int_{\alpha_2} \mathbf{G} = 2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4};$$

Finalmente: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{G} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{4}.$

883 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ con $\mathbf{G} = (xz - \frac{y^2}{2}, 0, yz)$.

$$\int_S \mathbf{F} = 0;$$

$\partial S = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$, con
$\alpha_1(u) = (u, u^2, 0)$, $u \in [0,1]$; $\alpha_2(u) = (1,1,v)$, $v \in [0,1]$;
$\alpha_3^-(u) = (u, u^2, 1)$, $u \in [0,1]$; $\alpha_4^-(v) = (0,0,v)$, $v \in [0,1]$;

$$\int_{\alpha_1} \mathbf{G} = -\frac{1}{10};\ \int_{\alpha_2} \mathbf{G} = \frac{1}{2};\ \int_{\alpha_3^-} \mathbf{G} = \frac{2}{5};\ \int_{\alpha_4^-} \mathbf{G} = 0;$$

Finalmente $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{G} = 0.$

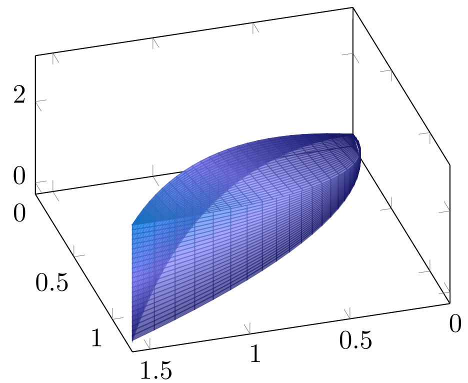


Figura 43: Región del Ejercicio 882

885 $S \equiv \Phi(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2}\right)$, $\theta \in [0,\pi]$, $r \in [0, \frac{4}{5}\sin\theta]$ (Figura 44);

$$\int_S \mathbf{F} = \frac{4}{25}\pi;$$

$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, con $\mathbf{G} = (0, x, 0)$;

$\partial S = (\frac{2}{5}\sin(2\theta), \frac{4}{5}\operatorname{sen}^2\theta, \sqrt{1 - \frac{16}{25}\cos^2\theta})$, $\theta \in [0,\pi]$;

$$\int_\partial \mathbf{G} = \frac{4}{25}\pi.$$

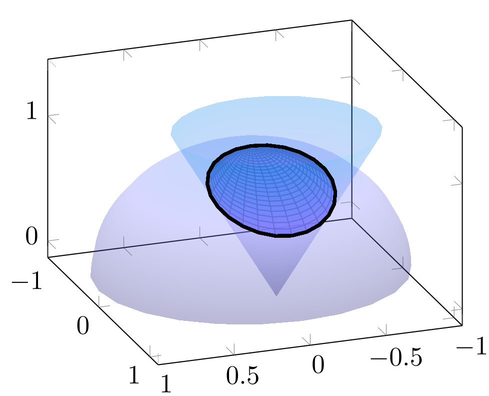


Figura 44: Gráfica del Ejercicio 885

888 (a) $S \equiv \Phi(x,y) = (x, y, 1 - x^2)$, $x \in [-1,1]$, $y \in [0,1]$;

$\displaystyle\int_S (z, z, y) = 1.$

(b) $\nabla \times \mathbf{G} = (z, z, y)$ con $\mathbf{G} = (\frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2}, -\frac{z^2}{2}, 0).$

$\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{G} = 1.$